Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 12 vom 30. Juni 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Dimension)**.** Wiederholen Sie die *Dimension* von Ringen. Welche Beispiele, Sätze und Beweistechniken kennen Sie dazu? Geben Sie zwei nicht-isomorphe Ringe mit Dimension 2026 an.

Fingerübung B (primäre Ideale)**.** Welche der folgenden Ideale sind primär?

1. (42) in $\mathbb{Z}$
2. (121) in $\mathbb{Q}$
3. (T^{2026}) in $\mathbb{R}[T]$
4. $(T^2 - 1)$ in $\mathbb{R}[T]$

Fingerübung C (primäre Ideale via Restklassenring)**.** Sei R ein Ring und $q \subset R$ ein Ideal mit $q \neq R$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Das Ideal $q \subset R$ ist primär.
2. Es gilt
$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y \in q \Longrightarrow \bigl(x \in q \lor y \in q \lor (x \in \sqrt{q} \land y \in \sqrt{q})\bigr)$$
3. Jeder Nullteiler in R/q ist nilpotent.

Hinweis. Ein *Nullteiler* in einem Ring R ist ein Element $x \in R$, für das ein Element $y \in R \setminus \{0\}$ mit $x \cdot y = 0$ existiert.

Fingerübung D (Primärzerlegungen)**.** Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass

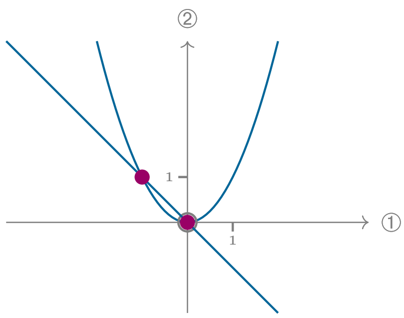
$$(X^2, X \cdot Y) = (X) \cap (X^2, X \cdot Y, Y) \quad \text{und} \quad (X^2, X \cdot Y) = (X) \cap (X^2, X \cdot Y, Y^2)$$

minimale Primärzerlegungen von $(X^2, X \cdot Y)$ in $K[X, Y]$ sind.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Primärzerlegung, geometrisch; 4 Punkte)**.** Bestimmen Sie eine minimale Primärzerlegung von $(Y - X^2, Y + X)$ in $\mathbb{C}[X, Y]$.

Hinweis. Geometrisch denken, algebraisch beweisen!



Bitte wenden

Aufgabe 2 (artinsche Ringe; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $R[T]$ artinsch, so ist R artinsch.
2. Ist $\dim R \leq 2026$, so ist R artinsch.

Aufgabe 3 (nilpotente Nilradikale; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $a \subset R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = (0)$ gibt.

1. Zeigen Sie: Ist R noethersch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Das Nilradikal ist endlich erzeugt. Was passiert daher in hohen Potenzen von $\sqrt[R]{0}$?

2. Zeigen Sie: Ist R artinsch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Sei $a := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} (\sqrt[R]{0})^n$. Warum genügt es zu zeigen, dass $a = (0)$ ist? Nehmen Sie an, a wäre nicht das Nullideal und betrachten Sie dann die Menge M aller Ideale $b \subset R$ mit $a \cdot b \neq (0)$. Warum besitzt M ein bezüglich Inklusion minimales Element b ? Warum ist b von einem Element erzeugt? Was passiert mit diesem Element?

Aufgabe 4 (noethersch vs. artinsch; 4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und maximale Ideale $m_1, \dots, m_n \subset R$ mit $m_1 \cdot \dots \cdot m_n = (0)$. Zeigen Sie, dass R in dieser Situation genau dann noethersch ist, wenn R artinsch ist.
Hinweis. Betrachten Sie die R/m_j-Vektorräume $m_1 \cdot \dots \cdot m_{j-1}/m_1 \cdot \dots \cdot m_j$ und Kettenbedingungen von Untermoduln. Wie vererben sich diese Kettenbedingungen durch die einzelnen Stufen? Was hat die Dimension eines Vektorraums mit auf-/absteigenden Ketten von Untervektorräumen zu tun? Beginnen Sie im Zweifel mit kleinen Werten für n.

Bonusaufgabe (Gröbner-Basen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Lesen Sie Anhang A.3 über Gröbner-Basen.

1. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Buchberger eine Gröbner-Basis des folgenden Ideals in $\mathbb{C}[X, Y]$:

$$a := (X^3 - 2 \cdot X \cdot Y, X^2 \cdot Y - 2 \cdot Y^2 + X)$$

2. Entscheiden Sie mithilfe dieser Gröbner-Basis, ob die folgenden beiden Polynome in a liegen oder nicht:

$$X^{2026} + 2026 \cdot X \cdot Y, \quad X^{2026} + Y^{2025}$$

Abgabe bis 7. Juli 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS