Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 13 vom 7. Juli 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Kapitel 4)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist R ein Ring, der ein endlich erzeugtes Ideal enthält, so ist R noethersch.
2. Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[X, Y]$ noethersch.
3. Ist R ein noetherscher Ring, so ist nach dem Artin–Tate-Lemma jede endlich erzeugte R-Algebra auch als R-Modul endlich erzeugt.
4. Ist R ein noetherscher Ring, so ist ein Ideal $q \subset R$ genau dann primär, wenn $\sqrt{q}$ maximal ist.
5. Ist R ein artinscher Ring, so hat jedes Ideal von R eine Primärzerlegung.
6. Ist R ein Dedekindring, so ist auch $R[T]$ ein Dedekindring.

Fingerübung B (diskrete Bewertungsringe)**.** Welche der folgenden Ringe sind diskrete Bewertungsringe?

$$\mathbb{R}[T]/(T^2 + 2026), \quad \mathbb{R}[T]_{(T^2+2026)}, \quad \mathbb{Z}_{(5)} \times \mathbb{Z}_{(2027)}, \quad \mathbb{Z}_{2027}$$

Fingerübung C (Ketten, Zykel, Ränder, Homologie)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Kettenkomplexe von $\mathbb{Z}$-Moduln alle Zykel und Ränder sowie die Homologie.

1. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2026} \mathbb{Z}$
2. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$
3. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$
4. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4$

Fingerübung D (Kettenabbildungen)**.** Zwischen welchen der Kettenkomplexe aus Fingerübung C gibt es Kettenabbildungen, die in Homologie *nicht* in jedem Grad die Nullabbildung induzieren?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Homologie; 4 (=2+2) Punkte)**.** Ist R ein Ring, so betrachten wir den Kettenkomplex $C(R)$, der in den Graden 2, 1, 0 konzentriert ist, und wie folgt gegeben ist:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 22 & -20 \\ 1 & 1 \\ -58 & 26 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}} R$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Wieviele Elemente enthält $H_1(C(\mathbb{Z}))$?
2. Wieviele Elemente enthält $H_1(C(\mathbb{R}))$?

Hinweis. Welche Teilaufgabe ist einfacher? Lineare Algebra I *und* II!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Homologie und Isomorphismen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein ninoko Ring, seien $C = (C_*, \partial_*)$ bzw. $C' = (C'_*, \partial'_*)$ Ketttenkomplexe von R-Linksmoduln und sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $C_n \cong_R C'_n$, so folgt $H_n(C) \cong_R H_n(C')$.
2. Ist $H_n(C) \cong_R H_n(C')$, so folgt $C_n \cong_R C'_n$.

Aufgabe 3 (Dedekind, geometrisch; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k := R/m$. Zeigen Sie, dass $\dim_k m/m^2 = 1$ gilt.
2. Folgern Sie: Der Ring $\mathbf{K}_\mathbb{C}[\mathbf{V}_\mathbb{C}(Y^2 - X^3 - X^2)]$ ist *kein* Dedekindring.

   Hinweis. Aufgabe 1 von Blatt 9.

Aufgabe 4 (Dedekind, algebraisch; 4 Punkte)**.** Bearbeiten Sie einen der beiden folgenden Aufgabenteile:

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $x \in Q(R)$. Zeigen Sie: Wenn es ein normiertes Polynom $f \in R[T] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$ gibt, so ist $x \in R$.

   Hinweis. Ist $x \notin R$, so ist $1/x \in R$ (warum?). Wie hilft nun $f(x)$?
2. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ *kein* Dedekindring ist.

   Hinweis. Es ist $(2, 1 + \sqrt{5})$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (warum?) und den goldenen Schnitt sollte man immer im Auge behalten.

Bonusaufgabe (algorithmische homologische Algebra; 4 Punkte)**.** Schreiben Sie (in einer Programmiersprache Ihrer Wahl) ein Programm, das die Homologie von (gradweise endlich erzeugten) Kettenkomplexen von $\mathbb{Z}$-Moduln berechnet. Überlegen Sie sich dazu zunächst, wie Sie Kettenkomplexe und die Ergebnisse überhaupt vernünftig repräsentieren können.

Abgabe bis 14. Juli 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS
Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt.