

Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 14 vom 14. Juli 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Kapitel 5). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Jeder Rand ist ein Zykel.
2. Jede Kettenabbildung ist kettenhomotop zur Nullabbildung zwischen den entsprechenden Kettenkomplexen.
3. Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex und $n \in \mathbb{N}$ mit $C_n \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$, so ist $H_n(C) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.
4. Jeder projektive Modul ist frei.
5. Jeder $\mathbb{Z}/(2027)$ -Modul ist projektiv.
6. Es ist $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/42) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/42$.

Fingerübung B (Tensorprodukt von Kettenkomplexen). Sei R ein nichttriviale Ring und sei $M \in \mathrm{Mod}_R$.

1. Konstruieren Sie einen Funktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathrm{Ch} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Ch}$, indem Sie gradweise das Tensorprodukt von Kettenmoduln und Randoperatoren bilden.
2. Zeigen Sie, dass dieser Funktor $M \otimes_R \cdot$ Kettenhomotopien auf Kettenhomotopien abbildet.

Fingerübung C (Projektivität). Welche der folgenden $\mathbb{Z}$ -Moduln sind projektiv?

$$\mathbb{Z}/2026 \oplus \mathbb{Z}/42, \quad \mathbb{Z}[T], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^{2026}$$

Fingerübung D (projektive Auflösungen). Geben Sie jeweils mindestens zwei nicht-isomorphe projektive Auflösungen an!

1. von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.
2. von $\mathbb{Z}/2$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.
3. von $\mathbb{Z}[T]/(T)$ als $\mathbb{Z}[T]$ -Modul.
4. von $\mathbb{Z}[T]$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.

Fingerübung E (Tor). Beschreiben Sie die folgenden Moduln möglichst explizit!

1. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2026, \mathbb{Z}/2027)$
2. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{R}}(C([0, 1], \mathbb{R}), C([0, 1], \mathbb{R}))$
3. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[X, Y]}(\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2), \mathbb{C}[X, Y])$
4. $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}[T]/(2, T^2 + T + 1), \mathbb{Z}[T]/(T))$

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Tor; 4 (=2+2) Punkte). Beschreiben Sie die folgenden Moduln möglichst explizit!

1. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Q}[T]}(\mathbb{Q}[T]/(T^2 + T^5) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T + 1), \mathbb{Q}[T]/(T))$
2. $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Q}[T]}(\mathbb{Q}(T), \mathbb{Q}[T] \oplus \mathbb{Q}[T]/(T^{2026}))$

Aufgabe 2 (Kettenhomotopie; 4 (=2+2) Punkte). Sei R ein nichttriviale Ring, seien $C = (C_*, \partial_*)$ bzw. $C' = (C'_*, \partial'_*)$ Kettenkomplexe von R -Linksmoduln und sei $f: C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus.
2. Ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $H_n(f): H_n(C) \rightarrow H_n(C')$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (eine Charakterisierung von Projektivität; 4 Punkte). Sei R ein nichttriviale Ring und sei P ein R -Linksmodul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R -Modul P ist projektiv.
2. Der Funktor ${}_R\mathrm{Hom}(P, \cdot): {}_R\mathrm{Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\mathrm{Mod}$ ist exakt.

Aufgabe 4 (Kettenkomplexe mit trivialem Rand; 4 Punkte). Sei K ein Körper und sei C ein K -Kettenkomplex. Zeigen Sie, dass es einen K -Kettenkomplex $C' = (C'_*, \partial'_*)$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$C \simeq_K C' \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \partial'_n = 0$$

Hinweis. Was ergibt sich für $H_*(C')$? Wie muss man also C' konstruieren?

Bonusaufgabe (Ext; 4 Punkte). Schlagen Sie in der Literatur nach, wie Ext „dual“ zu Tor konstruiert wird und fassen Sie die Konstruktion und die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften kurz zusammen. Insbesondere:

- Welcher Funktor wird abgeleitet?
- Was ist der duale Begriff zu projektiven Moduln?
- Was ist der duale Begriff zu injektiven Eigenschaften?
- Wie kann man Ext berechnen?