Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 2 vom 21. April 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: universelle Eigenschaften)**.** Wiederholen Sie universelle Eigenschaften aus der Linearen Algebra I/II (Quotienten, direkte Summen, direkte Produkte, freie Moduln, Tensorprodukte, ...).

Fingerübung B (partiell geordnete Mengen als Kategorien)**.**

1. Wie kann man „sinnvoll“ aus einer partiell geordneten Menge eine Kategorie definieren?
2. Wie kann man Funktoren zwischen solchen Kategorien in der Sprache der partiell geordneten Mengen beschreiben?

Fingerübung C (Funktoren)**.** Liefern die folgenden Konstrukte Funktoren vom Typ $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$?

1. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 0$
2. Auf Objekten: $V \longmapsto \{0\}$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 0$
3. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto \mathrm{id}_V$
4. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 2026 \cdot f$

Fingerübung D (kommutative Diagramme)**.**

1. Geben Sie ein Gleichungssystem an, das zur Kommutativität des untenstehenden Diagramms äquivalent ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "k"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

2. Wie kann man die Eigenschaft, dass eine Abbildung von Mengen selbstinvers ist, durch ein geeignetes kommutatives Diagramm beschreiben?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Gruppenkategorien; 4 Punkte)**.** Seien G und H Gruppen. Wie kann man Funktoren $C_G \longrightarrow C_H$ gruppentheoretisch beschreiben? Formulieren Sie eine geeignete Behauptung und beweisen Sie diese!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Hom; 4 (=2+2) Punkte)**.** Seien X und Y Moduln über $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(X,\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(Y,\mathbb{Z})$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.

2. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},X) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},Y)$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.

Aufgabe 3 (direkte Summen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Definieren Sie die Funktoren $\mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$, die mit der suggestiven Notation $V \oplus_K \,\cdot\,$ und $\,\cdot\, \oplus_K V$ bezeichnet werden. Warum handelt es sich tatsächlich um Funktoren?

2. Zeigen Sie, dass die Funktoren $V \oplus_K \,\cdot\,$ und $\,\cdot\, \oplus_K V$ natürlich isomorph sind (als Funktoren $\mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$).

Aufgabe 4 (adjungierter Funktor zum Vergessen von Kommutativität; 4 Punkte)**.** Sei $V\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Group}$ der Vergissfunktor. Zeigen Sie, dass es einen Funktor $A\colon \mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ gibt, so dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}\bigl(A(\,\cdot\,),\,\cdot\,\bigr) \cong \mathrm{Mor}_{\mathsf{Group}}\bigl(\,\cdot\,,V(\,\cdot\,)\bigr)$$

(als Funktoren $\mathsf{Group}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Set}$) gibt.
Hinweis. Sie kennen A bereits aus der Algebra-Vorlesung! Sind C und D Kategorien, so ist $C \times D$ die Kategorie, die durch paarweise Objekte, Morphismen und Verknüpfungen definiert ist.

Bonusaufgabe (Monaden; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur den Begriff der *Monade* (im Sinne der Kategorientheorie ...) nach und reproduzieren Sie diese Definition. Illustrieren Sie die Definition durch geeignete kommutative Diagramme.

2. Erklären Sie die *Maybe Monad* oder die *State Monad* in diesem Kontext (Definition und Anwendungen).

Hinweis. Vergessen Sie nicht, die verwendeten Quellen anzugeben!