Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 3 vom 28. April 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Tensorprodukt)**.** Wiederholen Sie Details zum Tensorprodukt aus der Linearen Algebra I/II: universelle Eigenschaft, Konstruktion, Eigenschaften, Rechnen mit Elementartensoren, ...

Fingerübung B ((Ko)Limiten in Set)**.** Sei X eine Menge. Wir betrachten die gewöhnliche Anordnung auf $\mathbb{N}$.

1. Was ist $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen in X ist?
2. Was ist $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen in X ist?

Fingerübung C ((Ko)Limiten über die leere Indexmenge)**.** Sei C eine Kategorie. Wir betrachten die leere (einzige!) partielle Ordnung auf $I := \emptyset$.

1. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varinjlim_I$ in C erfüllt.
2. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varprojlim_I$ in C erfüllt.
3. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie Ring ?
4. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$?

Fingerübung D (Yoneda-Lemma)**.** Sei C eine Kategorie, sei $X \in \operatorname{Ob}(C)$ und sei $F\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ ein Funktor. Erklären Sie, wie natürliche Transformationen $\operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,) \Longrightarrow F$ genau den Elementen von $F(X)$ entsprechen. Finden Sie geeignete Konstruktionen/Formulierungen, analog zu den entsprechenden Varianten des Yoneda-Lemmas aus der Vorlesung.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Einheitswurzeln; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad z^n = 1\}$ der komplexen Einheitswurzeln und die additive Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph sind.
2. Wie kann man die Familie $(\mathbb{Z}/n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ abelscher Gruppen so zu einem Diagramm (über eine geeignete partielle Ordnung auf $\mathbb{N}_{>0}$) erweitern, dass $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/n \cong_{\mathsf{Ab}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (Darstellbarkeit; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Der Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist darstellbar.
2. Der Identitätsfunktor $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist darstellbar.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (eine Wurzel aus -1; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei

$$R := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n) \;\middle|\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x_{n+1} \equiv x_n \mod 5^n \right\}.$$

Dann bildet R bezüglich komponentenweiser Addition/Multiplikation einen Ring. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass die durch konstante Folgen gegebene Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

2. Wie kann man R als inversen Limes der Form $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n)$ in Ring auffassen?

3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \mod 5$ und es gebe eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + 1 = 5^n \cdot k$. Zeigen Sie: Dann erfüllt $y := x - 4 \cdot 5^n \cdot k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $y^2 \equiv -1 \mod 5^{n+1}$.

4. Folgern Sie: Es gibt ein $z \in R$ mit $z^2 = -1$.

Aufgabe 4 (darstellbare Funktoren und Limiten; 4 Punkte)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \operatorname{Ob}(C)$. Zeigen Sie, dass der Funktor $\operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ im folgenden Sinne mit inversen Limiten verträglich ist:

> Ist $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und ist $Y := \varprojlim_{i\in I} Y_i$ ein inverser Limes eines I-Diagramms in C, so erfüllt $\operatorname{Mor}_C(X, Y)$ zusammen mit den induzierten Morphismen die universelle Eigenschaft des inversen Limes $\varprojlim_{i\in I} \operatorname{Mor}_C(X, Y_i)$ in Set.

Hinweis. Verstehen Sie, was mit „mit den induzierten Morphismen“ gemeint ist? Welche universelle Eigenschaft ist nachzuweisen?

Bonusaufgabe (Gruppenobjekte; 4 (=2+1+1) Punkte)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie (und unter welchen Voraussetzungen) *Gruppenobjekte* in Kategorien definiert sind. Illustrieren Sie die Definition durch geeignete Diagramme.

   Hinweis. Vergessen Sie nicht, alle verwendeten Quellen zu zitieren!

2. Erklären Sie, wie Gruppenobjekte in Set genau den gewöhnlichen Gruppen entsprechen.

3. Zeigen Sie: Ist X ein Gruppenobjekt in einer Kategorie C, so faktorisiert der von X dargestellte kontravariante Funktor $\operatorname{Mor}_C(\,\cdot\,, X) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ über den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Abgabe bis 5. Mai 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS