Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 4 vom 5. Mai 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Primideale, maximale Ideale)**.** Wiederholen Sie Primideale, maximale Ideale und die entsprechenden Charakterisierungen durch Restklassenringe.

Fingerübung B (balancierte Produkte)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul, sei N ein R-Linksmodul und sei Z eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Ist $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ ein R-balanciertes Produkt, so folgt

$$\forall_{n \in N} \quad f(0,n) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{m \in M} \quad f(m,0) = 0.$$

Fingerübung C (Tensorprodukt)**.** Bestimmen Sie möglichst einfache/explizite Darstellungen der folgenden Tensorprodukte:

1. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$
2. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10$
3. $\mathbb{Q}[T]/(T^2) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
4. $\mathbb{Q}[T]/(T^2-1) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
5. $\mathbb{Z}[X,Y]/(2027,X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X,Y]} \mathbb{Z}[X,Y]/(X+1)$
6. $\mathbb{Z}[X,Y]/(2027,X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X,Y]} \mathbb{Z}[X,Y]/(X)$

Fingerübung D (Tensorproduktfunktoren)**.** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \not\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Vermeiden Sie dabei den Klassifikationssatz für endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln und verwenden Sie stattdessen einen geeigneten Tensorproduktfunktor (und die Dimension von Vektorräumen).

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Tensorproduktfunktoren; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{Z}[X,Y]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mithilfe geeigneter Tensorproduktfunktoren:

1. $R \oplus R/(X) \not\cong_R R \oplus R/(X) \oplus R/(X)$
2. $R/(X) \oplus R/(X) \oplus R/(X+1,Y) \not\cong_R R/(X) \oplus R/(X+1,Y) \oplus R/(X+1,Y)$

Aufgabe 2 (Tensorquadrate; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.
2. Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Tensorprodukte und Ideale; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring und seien $a, b \subset R$ Ideale in R. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} R/a \otimes_R R/b &\longrightarrow R/(a \cup b) \\ [x] \otimes [y] &\longmapsto [x \cdot y] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist. Geben Sie zwei Beweise:

1. indem Sie einen inversen Isomorphismus konstruieren;
2. mit der Verträglichkeit von Tensorprodukten mit Kolimiten/Quotienten.

Aufgabe 4 (Tensorprodukt als Koprodukt; 4 (=2+2) Punkte)**.** Seien R und S Ringe.

1. Zeigen Sie: Die abelsche Gruppe $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ bildet bezüglich der folgenden Multiplikation (und $0 \otimes 0$ bzw. $1 \otimes 1$) einen Ring:

$$\begin{aligned} (R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \times (R \otimes_{\mathbb{Z}} S) &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ (x \otimes y, x' \otimes y') &\longmapsto (x \cdot x') \otimes (y \cdot y') \end{aligned}$$

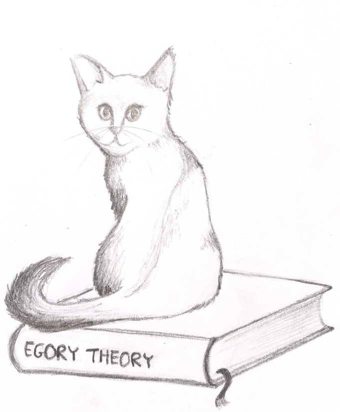
2. Zeigen Sie, dass $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ zusammen mit den folgenden Abbildungen das Koprodukt von R und S in der Kategorie Ring bildet:

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ x &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} S &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ x &\longmapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (Tensorprodukt von Körpern; 4 (=2+2) Punkte)**.** Wir betrachten $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i)$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ und auf den untenstehenden Tensorprodukten die Ringstruktur, die analog zu Aufgabe 4 definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *kein* Körper ist.
2. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ zum Kompositum $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cdot \mathbb{Q}(i)$ in $\mathbb{C}$ isomorph ist.

Bonusaufgabe (Kategorientheorie; 2 Punkte)**.** Zeichnen Sie einen Cartoon (oder schreiben Sie ein Gedicht) zu „Nutzen und Verwirrung durch Kategorientheorie“.
Hinweis. Bitte keine KI verwenden, sondern selbst kreativ sein! „Fühlt es sich an wie Schummeln, ist es Schummeln!“(Poesie für Neandertaler)



„Handle nur nach derjenigen Maxime,
durch die du zugleich wollen kannst,
dass sie eine universelle Eigenschaft werde.“

Kategorieller Imperativ

Abgabe bis 12. Mai 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS