Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 5 vom 12. Mai 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen" beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Polynomringe)**.** Wiederholen Sie Eigenschaften von Polynomringen und Irreduzibilitätskriterien in Polynomringen.

Fingerübung B (Spektren)**.** Wieviele/Welche Punkte enthalten die Primspektren bzw. Maximalsprektren der folgenden Ringe?

$$\mathbb{Z}/(2026), \quad \mathbb{Z}/(2027), \quad \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(99), \quad \mathbb{Z}/(9) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(99)$$

$$\mathbb{Q}[T]/(T^2 + T), \quad \mathbb{R}[T]/(T^2 + T), \quad \mathbb{C}[T]/(T^2 + T)$$

Fingerübung C (induzierte Abbildungen auf Primspektren)**.** Sei $f \colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ die kanonische Inklusion und sei $\operatorname{Spec}(f) \colon \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ die induzierte Abbildung.

1. Was ist $\operatorname{Spec}(f)\bigl((T + 1)\bigr)$?
2. Was ist $\operatorname{Spec}(f)\bigl((T + i)\bigr)$?
3. Was ist $\operatorname{Spec}(f)\bigl((T - i)\bigr)$?

Fingerübung D (Spec als Funktor)**.** Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec} \colon \mathsf{Ring} \longrightarrow \mathsf{Set}$ tatsächlich einen (kontravarianten) Funktor definiert.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (induzierte Abbildungen auf Primspektren; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $f \colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ die kanonische Inklusion und sei $\operatorname{Spec}(f) \colon \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ die induzierte Abbildung. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Gibt es ein $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]$ mit $\operatorname{Spec}(f)(p) = (T^2 + 2026)$?
2. Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathbb{R}[T]$ mit $\operatorname{Spec}(f)\bigl((T - \zeta_3)\bigr) = (p)$.
3. *Bonus (2 Punkte).* Formulieren und beweisen Sie eine geeignete allgemeine Aussage für $\operatorname{Spec}(f) \colon \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$.

Aufgabe 2 (Injektivität/Surjektivität auf Primspektren; 4 (=2+2) Punkte)**.** Seien R und S Ringe und sei $f \colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist f surjektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f \colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ surjektiv.
2. Ist f injektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f \colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ injektiv.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (zwei Punkte; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/(Y-X^2, Y+X)$.

1. Zeigen Sie, dass $R \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

   Hinweis. Eliminieren Sie zunächst eine Variable und wenden Sie dann den Chinesischen Restsatz an.

2. Folgern Sie, dass $\operatorname{Spec} R$ genau zwei Elemente enthält. Beschreiben Sie diese beiden Primideale in R auf einfache Weise.

Aufgabe 4 (Zariski-Topologie; 4 (=1+1+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Ist $a \subset R$, so schreiben wir

$$V_R(a) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\} \subset \operatorname{Spec} R.$$

1. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \subset R$ mit $V_R(a) = \emptyset$ und $V_R(b) = \operatorname{Spec} R$.

2. Zeigen Sie: Ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von R, so gilt

$$\bigcap_{i \in I} V_R(a_i) = V_R\biggl(\bigcup_{i \in I} a_i\biggr).$$

3. Zeigen Sie: Sind $a, b \subset R$, so gilt $V_R(a) \cup V_R(b) = V_R\bigl(\{x \cdot y \mid x \in a, y \in b\}\bigr)$.

Bonusaufgabe (Topologie via Algebra; 4 Punkte)**.** Sei X ein topologischer Hausdorffraum (z.B. $X = [0,1]$) und sei

$$\begin{aligned} \mu\colon X &\longrightarrow \operatorname{mSpec} C(X, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \bigl\{f \in C(X,\mathbb{R}) \bigm| f(x) = 0\bigr\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $V \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es ein Ideal $a \subset C(X,\mathbb{R})$ mit $\mu(V) = V_{C(X,\mathbb{R})}(a) \cap \operatorname{mSpec} C(X,\mathbb{R})$ (Aufgabe 4) gibt.
Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie nur den Spezialfall $X = [0,1]$ behandeln. Die Mengen $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C(X,\mathbb{R})$ bilden eine Basis der Topologie auf X.