Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 6 vom 19. Mai 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Kapitel 1)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. In jeder nicht-leeren Kategorie gibt es mindestens einen Isomorphismus.
2. Der Funktor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\,\cdot\,,\mathbb{R}),\mathbb{R})\colon {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$ ist kovariant.
3. Die Funktoren $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\,\cdot\,,\mathbb{R})$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,,\mathbb{R})\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ sind natürlich isomorph.
4. In der Kategorie der endlichen Gruppen existieren alle inversen Limiten.
5. Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, M', N mit $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{Z}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$.
6. Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, M', N mit $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{Z}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$ gilt $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ oder $N \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Fingerübung B (affine algebraische Mengen)**.** Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (von Hand oder mithilfe eines Computer-Algebra-Systems):

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\cdot y^2 = 3\}$
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\cdot y = 1\}$
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\cdot y^2 = 1\}$
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\}$
5. Erinnern Sie sich eigentlich noch an die Hauptachsentransformation?!

Fingerübung C (Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden affinen algebraischen Mengen $V \subset \mathbb{C}^2$ jeweils zwei Punkte in V. Wie erhält man daraus maximale Ideale von $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[V]$?

1. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2 - Y)$
2. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^2 - X^3)$

Fingerübung D (Koordinatenringe)**.** Überlegen Sie sich für jedes der folgenden Polynome f: Wie sieht $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ aus? Was ist $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f))$? Was ist $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$?

$$
\begin{aligned}
&X \in \mathbb{R}[X], \quad X \in \mathbb{R}[X,Y], \quad X^2 \in \mathbb{R}[X],\\
&X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X], \quad X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X], \quad X^2 + Y \in \mathbb{R}[X,Y],\\
&X^2 \cdot (X^2 + Y)^3 \in \mathbb{R}[X,Y]
\end{aligned}
$$

Hinweis. Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $K[X_1,\dots,X_n]$ faktoriell (Satz von Gauß).

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Octdong und Tuelle; 4 (=2+2) Punkte)**.** Wir betrachten die Polynome

$$f := X^2 + Y^2 + Z^4 - Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$
$$g := Y \cdot Z \cdot (X^2 + Y - Z) \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$

in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ und die zugehörigen affinen algebraischen Mengen $V := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ bzw. $W := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(g)$ in $\mathbb{R}^3$.

1. Verwenden Sie ein Computer-Algebra-System Ihrer Wahl, um graphische Darstellungen von V und W zu erhalten. Vergessen Sie nicht, die Achsen zu beschriften und verwendete Hilfsmittel nachvollziehbar anzugeben!
2. Geben Sie zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[V]$ oder zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[W]$ an und begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Der Körper $\mathbb{R}$ ist *nicht* algebraisch abgeschlossen!

Aufgabe 2 (affine algebraische Mengen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $V, W \subset K^n$ affine algebraische Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Dann ist auch $V \cap W$ eine affine algebraische Menge.
2. Dann ist auch $V \setminus W$ eine affine algebraische Menge.

Aufgabe 3 (Nullstellenmengen vs. Ideale; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine affine algebraische Menge. Zeigen Sie:

$$\mathbf{V}_K\bigl(\mathbf{I}_K(V)\bigr) = V$$

Aufgabe 4 (Nilradikal; 4 (=1+1+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Das *Nilradikal von* R ist definiert als

$$N(R) := \{x \in R \mid \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad x^n = 0\} \subset R.$$

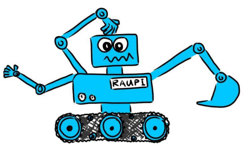
1. Zeigen Sie, dass $N\bigl(\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)\bigr)$ *kein* Primideal in $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $N(R) \subset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p$.
3. Zeigen Sie, dass $N(R) \supset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p$.

   Hinweis. Zornsches Lemma! Betrachten Sie für ein gegebenes Element die Menge aller Ideale, die keine Potenz dieses Elements enthalten …

Bonusaufgabe (Robotik; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Wie treten affine algebraische Mengen/Varietäten in der Robotik auf?
2. Was sind das *forward* bzw. *inverse kinematics problem*?

Hinweis. Wie immer: Quellenangaben!



Bonusaufgabe (DFG; 2 Punkte)**.** Wofür steht die Abkürzung „DFG"? Was macht die DFG? Wodurch wird sie finanziert? Welches Jahresbudget hat sie?
Hinweis. Belegen Sie alle Antworten mit nachvollziehbaren Quellen.

Abgabe bis 27. Mai 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS

Bei Abgabe per GRIPS: Die Übungsleiter sind dankbar, wenn Sie bereits am Dienstag abgeben.