Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 7 vom 26. Mai 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Quotientenkörper)**.** Wiederholen Sie die Konstruktion und universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers.

Fingerübung B (Jacobson-Radikal)**.** Berechnen Sie für die folgenden Ringe das Jacobson-Radikal:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/(2026), \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}[T], \quad \mathbb{Z}/(9), \quad \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(9)$$

Fingerübung C (Dimension)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $\dim \mathbb{Q}/(T^2 - 2) = \dim \mathbb{F}_2$
2. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2027)[T]$
3. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2026)[T]$
4. $\dim \mathbb{F}_2[X, Y] = \dim \mathbb{Z}[X, Y]$

Fingerübung D (Nilradikal, universelle Eigenschaft)**.** Wie lautet die universelle Eigenschaft des Nilradikals eines Rings? Beweisen Sie diese!

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Dimension, geometrisch; 4 (=1+1+2) Punkte)**.** Wir betrachten das Polynom $f := Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^3$.
2. Zeigen Sie, dass das Polynom f in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ prim ist.

   Hinweis. Der Ring $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ ist faktoriell.
3. Bestimmen Sie die Dimension des Koordinatenrings $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.

Aufgabe 2 (Dimension, algebraisch; 4 (=2+2) Punkte)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ surjektiv, so ist $\dim R \geq \dim S$.
2. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ injektiv, so ist $\dim R \leq \dim S$.

Aufgabe 3 (Dimension, anders; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie durch elementare Zahlentheorie (*ohne* das Kriterium von Coquand und Lombardi zu verwenden):

$$\forall_{x_0, x_1 \in \mathbb{Z}} \quad \exists_{k_0, k_1 \in \mathbb{N}} \quad \exists_{y_0, y_1 \in \mathbb{Z}} \quad {x_0}^{k_0} \cdot \bigl({x_1}^{k_1} \cdot (1 + x_1 \cdot y_1) + x_0 \cdot y_0\bigr) = 0.$$

Hinweis. Was ist, wenn x_0 und x_1 teilerfremd sind? Was, wenn nicht?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (die p-adischen ganzen Zahlen; 4 (=0+2+2) Punkte)**.** Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim und sei

$$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$$

der *Ring der p-adischen ganzen Zahlen*. Der inverse Limes wird dabei über das inverse System $(\pi_{n,k} \colon \mathbb{Z}/(p^n) \to \mathbb{Z}/(p^k))_{n,k \in \mathbb{N}_{>0}, k \leq n}$ der kanonischen Projektionen gebildet; zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\pi_n \colon \mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ die zugehörige Strukturabbildung des inversen Limes. Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben 2./3./4.:

1. Wiederholen Sie den Begriff des *inversen Limes*.
2. Sei $m := \ker \pi_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}/m \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(p)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \setminus m$ in $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ invertierbar ist.

   Hinweis. Analog zu inversen Limiten von Moduln gibt es ein konkretes Modell von $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ als Teilring des Produkts $\prod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$. Konstruieren Sie multiplikative Inverse induktiv (ähnlich zu Aufgabe 3 von Blatt 3).
4. Wieviele maximale Ideale besitzt also $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (1+1=3; 4 (=1+1+1+1) Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei $A := K(X) = Q(K[X])$ der rationale Funktionenkörper über K und sei $\widetilde{R} := A[\![Y]\!]$ der formale Potenzreihenring über A. Ist $f \in \widetilde{R}$, so schreiben wir kurz $f(0)$ für den Koeffizienten (in $K(X)$) von Y^0 in f. Sei $R := \{f \in \widetilde{R} \mid f(0) \in K\}$.

1. Zeigen Sie, dass $m := \{f \in R \mid f(0) = 0\}$ ein maximales Ideal in R ist.
2. Zeigen Sie, dass m das einzige nicht-triviale Primideal von R ist.
3. Sei $p := \{g \in R[T] \mid g(X) = 0 \text{ (in } R)\}$. Zeigen Sie, dass p ein Primideal in $R[T]$ ist, das $0 \subsetneq p \subsetneq m[T]$ erfüllt.
4. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$ und $\dim R[T] = 3$ ist.