

# Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 8 vom 2. Juni 2026

**Hinweis.** Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

**Fingerübung A** (Wiederholung: Kapitel 2). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1.  $\# \text{Spec } \mathbb{R} = \# \text{Spec } \mathbb{F}_2$
2.  $\# \text{Spec } \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \# \text{Spec } \mathbb{Z}/(2026)$
3.  $\# \text{Spec } \mathbb{Q}[T] = \# \text{Spec } \mathbb{Q}[T]/(T^3 - T)$
4. Bezüglich der Zariski-Topologie ist  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  kompakt.
5. Für alle affinen algebraischen Mengen  $V \subset \mathbb{C}^5$  ist  $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V))) = \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V)$ .
6.  $\dim \mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1) = \dim \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$

**Fingerübung B** (lokale Ringe). Welche der folgenden Ringe sind lokal?

$$\mathbb{Z}/(7), \quad \mathbb{Z}/(8), \quad \mathbb{Z}/(22), \quad \mathbb{Z}_{(11)}, \quad \mathbb{Z}_{13}$$

**Fingerübung C** (Lokalisierungen). Welche linke Seite passt zu welcher rechten?

$\mathbb{Z}_5$	$\{\sum_{j=-n}^n a_j \cdot T^j \mid n \in \mathbb{N}, a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbb{F}_5\}$
$\mathbb{F}_5[T]_{(T)}$	$\{0\}$
$\mathbb{F}_5[T]_T$	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b\}$
$\mathbb{Z}_{(5)}$	$\{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{F}_5[T], g(0) \neq 0\}$
$(\mathbb{F}_5[T] \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{F}_5[T]$	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} \quad b = 5^n\}$
$(5 \cdot \mathbb{Z} \cup \{1\})^{-1} \mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_5(T)$

**Fingerübung D** ( $\mathbb{Z}_2$ ). Finden Sie in der Literatur möglichst viele verschiedene Verwendungen der Notation  $\mathbb{Z}_2$  !

**Hinweis.** Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

**Aufgabe 1** (Tangentenraum; 4 (=1+1+1+1) Punkte). Wir betrachten den Ring  $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ , also den Koordinatenring zu  $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y - X^2) \subset \mathbb{C}^2$ . Sei  $p \subset R$  das von  $\{[X], [Y]\}$  erzeugte Ideal in  $R$  (dieses ist prim), sei  $R_p$  die Lokalisierung von  $R$  an  $R \setminus p$  und sei  $m_p$  das (vom Bild) von  $p$  erzeugte Ideal in  $R_p$ . Außerdem sei  $T_p := m_p/m_p \cdot m_p$  (als  $R_p$ -Modul); man bezeichnet  $T_p$  auch als *Tangentenraum* von  $\text{Spec } R$  im Punkt  $p$ , da  $T_p$  durch Ignorieren Terme höherer Ordnung (also durch Ausdividieren von  $m_p \cdot m_p$ ) gebildet wird.

1. Zeigen Sie, dass  $R_p \cong_{\text{Ring}} \{[f]/[g] \in Q(R) \mid f, g \in \mathbb{C}[X, Y], g(0, 0) \neq 0\}$ .
2. Zeigen Sie, dass  $m_p$  ein maximales Ideal in  $R_p$  mit  $R_p/m_p \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}$  ist.
3. Zeigen Sie, dass  $T_p$  auf kanonische Weise ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist.
4. Bestimmen Sie  $\dim_{\mathbb{C}} T_p$ .

*Bitte wenden*

**Aufgabe 2** (Verschwindungskriterium? 4 (=2+2) Punkte). Sei  $R$  ein Ring und  $S \subset R$  eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist  $S^{-1}R$  der Nullring, so ist  $0 \in S$ .
2. Ist  $S^{-1}R$  nicht der Nullring, so ist  $0 \notin S$ .

**Aufgabe 3** (Lokalitätskriterien; 4 (=2+2) Punkte). Sei  $R$  ein Ring, sei  $m \subset R$  ein Ideal mit  $m \neq R$ . Zeigen Sie:

1. Ist jedes Element aus  $R \setminus m$  eine Einheit in  $R$ , so ist  $R$  ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal  $m$ ).
2. Ist  $m$  ein maximales Ideal in  $R$  und ist für jedes  $x \in m$  das Element  $1 + x$  eine Einheit in  $R$ , so ist  $R$  ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal  $m$ ).

**Aufgabe 4** (Surjektivität; 4 Punkte). Sei  $R$  ein Ring und sei  $a \subset R$  ein Ideal mit  $a \subset J(R)$ . Außerdem sei  $M$  ein  $R$ -Modul, sei  $N$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul, sei  $f: M \rightarrow N$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus und  $\bar{f}: M/a \cdot M \rightarrow N/a \cdot N$  der von  $f$  induzierte Homomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Homomorphismus  $f$  ist surjektiv.
2. Der Homomorphismus  $\bar{f}$  ist surjektiv.

**Bonusaufgabe** (Satz von Monsky; 4 (=2+2) Punkte).

1. Was besagt der Satz von Monsky?
2. Was hat dieser Satz mit dem Ring der 2-adischen ganzen Zahlen zu tun?

*Hinweis.* Belegen Sie Ihre Antworten mit nachvollziehbaren Quellen!

