Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 9 vom 9. Juni 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: lokale Eigenschaften)**.** Welche lokalen Eigenschaften von topologischen Räumen/glatten Mannigfaltigkeiten kennen Sie? Was sind Beispiele für Eigenschaften, die nicht lokal sind?

Fingerübung B (Exaktheit)**.** Welche der folgenden Funktoren sind exakt?

1. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \,\cdot\, : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$
2. $\mathbb{Q}[T] \otimes_{\mathbb{Z}} \,\cdot\, : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}[T]}\mathsf{Mod}$
3. $\mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \,\cdot\, : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{F}_5}\mathsf{Mod}$
4. $\mathbb{Z}_{(5)} \otimes_{\mathbb{Z}} \,\cdot\, : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}_{(5)}}\mathsf{Mod}$

Fingerübung C (Primspektren)**.** Beschreiben Sie das Primspektrum der folgenden Ringe möglichst explizit.

1. $\mathbb{Z}_{(5)}$
2. $\mathbb{Z}_5$
3. $\bigl\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \bigm| a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b\bigr\}$
4. $\bigl((\mathbb{Z}[T]/(T^{2026} + 2026))_{[T]}\bigr)_{[T]/1}$

Fingerübung D (Dimension)**.** Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Ringe.

1. $\mathbb{Z}_{(5)}$
2. $\bigl\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \bigm| a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b\bigr\}$
3. $\mathbb{Z}[T]_T$
4. $\mathbb{Z}[T]_{(T)}$
5. $\mathbb{Z}[T]_{(2)}$
6. $\mathbb{Z}[T]_{(2,T)}$

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Tangentialraum II; 4 (=2+2) Punkte)**.** Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$, also den Koordinatenring zu $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2) \subset \mathbb{C}^2$. Sei $p \subset R$ das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugte Primideal in R (dieses ist prim), sei R_p die Lokalisierung von R an $R \setminus p$ und sei m_p das (vom Bild) von p erzeugte Ideal in R_p. Außerdem sei $T_p := m_p / m_p \cdot m_p$ (als R_p-Modul; Aufgabe 1 von Blatt 8).

1. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} T_p$ analog zu Aufgabe 1 von Blatt 8.
2. Schließen Sie daraus, dass R_p *nicht* zu $(\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2))_{([X],[Y])}$ isomorph ist, und erklären Sie, wie das mit der Anschauung zusammenpasst.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Dimension vs. Lokalität; 4 (=2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist R ein lokaler Ring, so ist $\dim R = 0$.
2. Ist R ein Ring mit $\dim R = 0$, so ist R ein lokaler Ring.

Aufgabe 3 (Lokalität der Dimension, Variante; 4 Punkte). Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass

$$\dim R = \sup \{\dim R_f \mid f \in R\}.$$

Aufgabe 4 (Flachheit vs. Lokalisierung; 4 (=2+2) Punkte). Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei M ein R-Modul.

1. Zeigen Sie: Ist M flach, so ist $S^{-1}M$ ein flacher $S^{-1}R$-Modul.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im allgemeinen *nicht* gilt.

Bonusaufgabe (Fasern; 4 (=2+2) Punkte). Seien R, R' Ringe, sei $f \colon R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und sei $p \in \operatorname{Spec} R$.

1. Zeigen Sie: Dann gibt es eine mit Inklusionen von Idealen verträgliche Bijektion
$$(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p) \longleftrightarrow \operatorname{Spec} k(p) \otimes_R R';$$
dabei ist $k(p)$ der Restklassenkörper des lokalen Rings R_p und R' wird via f als R-Modul aufgefasst.
2. Wie kann man diese Beschreibung der Faser $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p)$ verwenden, um einen konzeptionellen Beweis von Lemma 2.3.9 zu erhalten?

Abgabe bis 16. Juni 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS