

Klausur Kommutative Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

21. Juli 2026

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handschriftlich beschriftetes Blatt (DIN A4, doppelseitig, analog, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	12	9	10	9	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Ist $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/9$?
2. Ist der Funktor $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod}$ exakt?
3. Ist $\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\text{Ring}} \mathbb{Q}$?
4. Ist der Funktor $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\text{Mod}$ exakt?

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$, für den $\text{Spec } f: \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$ *nicht* surjektiv ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring R mit $\dim R = 2026$.
3. Geben Sie ein Beispiel für primäre Ideale $q_1, q_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $q_1 \neq q_2$ und $\sqrt{q_1} = \sqrt{q_2}$.

Aufgabe 3 ($6 + 4 = 10$ Punkte).

1. Wie beweist man den schwachen Hilbertschen Nullstellensatz? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!
2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis der Verträglichkeit des Tensorprodukts mit Kolimiten eingehen.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$ Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X \cdot Y)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X \cdot Y) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$.
4. Ist der Ring R noethersch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein noetherscher Ring mit $\# \operatorname{Spec} R = 1$ und sei $f: R \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus mit $\ker f \cdot \ker f = \ker f$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
2. Sei M ein $\mathbb{Z}$ -Modul und sei $f: M \rightarrow M$ eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung mit folgender Eigenschaft: Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ ist $L_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}} f: M_{(p)} \rightarrow M_{(p)}$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $f: M \rightarrow M$ ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$ -Moduln ist.

Aufgabe 6 ($4 + 4 = 8$ Punkte). Sei R ein Ring.

1. Sei P ein projektiver R -Modul. Zeigen Sie, dass dann auch $R \oplus P$ ein projektiver R -Modul ist.
2. Seien $C, D \in \text{Ob}({}_R\mathbf{Ch})$ und seien $f: C \rightarrow D$ und $g: D \rightarrow C$ Morphismen in ${}_R\mathbf{Ch}$ mit $g \circ f \simeq_R \text{id}_C$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $H_n(f): H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ injektiv.