

Klausur Kommutative Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

21. Juli 2026

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handschriftlich beschriftetes Blatt (DIN A4, doppelseitig, analog, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	12	9	10	9	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Ist $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/9$?
2. Ist der Funktor $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ exakt?
3. Ist $\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\text{Ring}} \mathbb{Q}$?
4. Ist der Funktor $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathbf{Mod}$ exakt?

Lösung:

1. *Behauptung.* Nein, es gilt $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \not\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/9$.

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(3,3) = \mathbb{Z}/3 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/3 \not\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/9. \quad \square$$

2. *Behauptung.* Nein, dieser Funktor ist *nicht* exakt.

Beweis. Der Funktor $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ ist nicht exakt, da er im allgemeinen injektive Abbildungen nicht auf injektive Abbildungen abbildet. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 3 \cdot x \end{aligned}$$

injektiv, aber

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} f: \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \\ x \otimes y &\longmapsto 3 \cdot x \otimes y = 0 \otimes y = 0 \end{aligned}$$

ist *nicht* injektiv (denn $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \not\cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$). $\square$

3. *Behauptung.* Nein, die Ringe $\mathbb{Z}_{(2)}$ und $\mathbb{Q}$ sind *nicht* isomorph.

Beweis. Isomorphe Ringe haben dieselbe Anzahl an Nicht-Einheiten. Es gilt jedoch:

- Der Ring $\mathbb{Q}$ besitzt nur eine Nicht-Einheit (nämlich 0).
- Der Ring $\mathbb{Z}_{(2)}$ besitzt mehr als eine Nicht-Einheit (z.B. 0 und 2). $\square$

4. *Behauptung.* Ja, dieser Funktor ist exakt.

Beweis. Es ist $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z}$. Somit handelt es sich bei dem gegebenen Funktor um einen Lokalisierungsfunktor und Lokalisierungsfunktor sind exakt. $\square$

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$, für den $\text{Spec } f: \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$ *nicht* surjektiv ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring R mit $\dim R = 2026$.
3. Geben Sie ein Beispiel für primäre Ideale $q_1, q_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $q_1 \neq q_2$ und $\sqrt{q_1} = \sqrt{q_2}$.

Lösung:

1. Die kanonische Inklusion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Ringhomomorphismus. Wegen

$$\#\text{Spec } \mathbb{Z} = \infty \quad \text{und} \quad \#\text{Spec } \mathbb{Q} = 1$$

ist $\text{Spec } f: \text{Spec } \mathbb{Q} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ *nicht* surjektiv.

2. Sei $R := \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{2026}]$. Dann gilt:

- Der Ring R ist noethersch, denn: Der Ring $\mathbb{Q}$ ist noethersch (als Körper). Induktiv folgt aus dem Hilbertschen Basissatz, dass $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{2026}]$ noethersch ist.
- Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gilt $\dim R = \dim \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{2026}] = 2026$.

3. Wir betrachten die folgenden Ideale von $\mathbb{C}[X, Y]$:

$$q_1 := (X, Y) \quad \text{und} \quad q_2 := (X, Y^2).$$

Dann gilt:

- Das Ideal q_1 ist maximal (da $\mathbb{C}[X, Y]/q_1 \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}$ ein Körper ist). Insbesondere ist q_1 prim, und damit auch primär sowie $\sqrt{q_1} = q_1$.
- Es ist $\sqrt{q_2} = q_1$, denn: Wegen $q_2 \subset q_1$ ist $\sqrt{q_2} \subset \sqrt{q_1} = q_1$. Wegen $X \in q_2 \subset \sqrt{q_2}$ und $Y \in \sqrt{q_2}$ (da $Y^2 \in q_2$) folgt $q_1 = (X, Y) \subset \sqrt{q_2}$. Also ist $\sqrt{q_2} = q_1 = \sqrt{q_1}$. Insbesondere ist $\sqrt{q_2}$ maximal, und damit q_2 auch primär.

Aufgabe 3 ($6 + 4 = 10$ Punkte).

1. Wie beweist man den schwachen Hilbertschen Nullstellensatz? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!
2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis der Verträglichkeit des Tensorprodukts mit Kolimiten eingehen.

Lösung:

1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeigt:
 - Der schwache Hilbertsche Nullstellensatz folgt aus der algebraischen Version des Hilbertschen Nullstellensatzes:
Sei A eine endlich erzeugte K -Algebra und sei $m \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist die kanonische Abbildung $K \rightarrow A/m$ ein Isomorphismus von K -Algebren.
 - Die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes folgert man aus dem Zariski-Lemma (Mini-Noether-Normalisierung) über endlich erzeugte Algebren über Körpern:
Jede endlich erzeugte K -Algebra, die ein Körper ist, ist bereits eine endliche Körpererweiterung von K .
 - Das Zariski-Lemma erhält man aus dem Artin–Tate-Lemma über die Vererbung von endlicher Erzeugtheit von Algebren über noetherschen Ringen.
Das Artin–Tate-Lemma reduziert das Problem im wesentlichen darauf, zu zeigen, dass rationale Funktionenkörper über ihrem Grundkörper keine endlich erzeugten Algebren sind (was man elementar nachrechnen kann).
2. Solche Resultate sind zum Beispiel [zwei davon genügen]:
 - Die Hom-Tensor-Adjunktion.
 - Die Verträglichkeit darstellbarer Funktoren mit inversen Limiten bzw. Kolimiten.
 - Die Verträglichkeit adjungierter Funktoren mit inversen Limiten bzw. Kolimiten.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$ Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X \cdot Y)$.

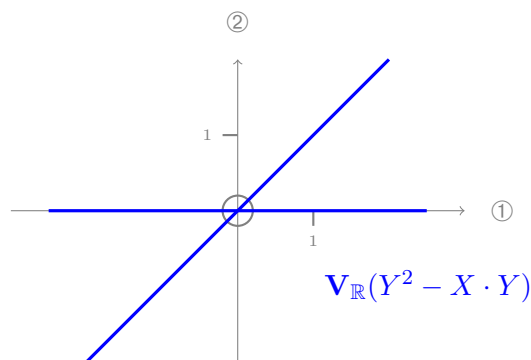
1. Skizzieren Sie $V_{\mathbb{R}}(Y^2 - X \cdot Y) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen abgeschlossenen Punkt von $\text{Spec } R$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$.
4. Ist der Ring R noethersch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}}(Y^2 - X \cdot Y) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \cdot y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}; \end{aligned}$$

somit erhalten wir:



2. Sei $m := ([X], [Y]) \subset R$. Dann ist m ein abgeschlossener Punkt von $\text{Spec } R$, denn:
 - Die abgeschlossenen Punkte von $\text{Spec } R$ sind genau die maximalen Ideale von R .
 - Das Ideal m ist maximal in R , denn $R/m \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}$ ist ein Körper.

3. Sei $\pi: \mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow R$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} R &\longrightarrow \{q \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y] \mid (Y^2 - X \cdot Y) \subset q\} \\ p &\longmapsto \pi^{-1}(p) \end{aligned}$$

bijektiv (und mit Inklusion von Idealen verträglich).

- Die Ideale (Y) und (X, Y) von $\mathbb{C}[X, Y]$ sind prim (die Restklassenringe sind isomorph zu $\mathbb{C}[X]$ bzw. $\mathbb{C}$, was beides Integritätsringe sind). Wegen $(Y^2 - X \cdot Y) = (Y \cdot (Y - X)) \subset (Y) \subsetneq (X, Y)$ ist daher $\dim R \geq 1$.
- Wegen $\dim \mathbb{C}[X, Y] = 2$ und $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y]$ sowie $(0) \subsetneq (Y^2 - X \cdot Y)$ folgt umgekehrt auch $\dim R \leq 1$.

4. *Behauptung.* Ja, der Ring R ist noethersch.

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathbb{C}[X, Y]$ noethersch (als Polynomring in endlich vielen Variablen über dem noetherschen Ring $\mathbb{C}$).

Da Restklassenringe von noetherschen Ringen noethersch sind, ist auch R noethersch. $\square$

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein noetherscher Ring mit $\# \operatorname{Spec} R = 1$ und sei $f: R \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus mit $\ker f \cdot \ker f = \ker f$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
2. Sei M ein $\mathbb{Z}$ -Modul und sei $f: M \rightarrow M$ eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung mit folgender Eigenschaft: Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ ist $L_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}} f: M_{(p)} \rightarrow M_{(p)}$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $f: M \rightarrow M$ ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$ -Moduln ist.

Lösung:

1. Wir zeigen, dass f injektiv ist, indem wir $\ker f = \{0\}$ zeigen:
 - Der Ring R ist nicht der Nullring und $\operatorname{mSpec} R \geq 1$, denn:
Nach Voraussetzung ist $\# \operatorname{Spec} R = 1$. Insbesondere ist R nicht der Nullring und R besitzt mindestens ein maximales Ideal (d.h. $\# \operatorname{mSpec} R \geq 1$).
 - Der Ring R ist lokal, denn:
Wegen $\operatorname{mSpec} R \subset \operatorname{Spec} R$ erhalten wir aus der Voraussetzung, dass $\# \operatorname{mSpec} R \leq \# \operatorname{Spec} R = 1$. Mit dem vorigen Schritt ergibt sich, dass $\# \operatorname{mSpec} R = 1$ ist.
 - Es ist $\ker f \subset J(R)$, denn:
Wegen $f(1) = 1 \neq 0$ ist $\ker f \neq R$. Somit gibt es ein maximales Ideal in R , das $\ker f$ enthält. Da R ein lokaler Ring ist, folgt $\ker f \subset J(R)$.
 - Da R noethersch ist, ist $\ker f$ als R -Modul endlich erzeugt. Mit dem Lemma von Nakayama erhalten wir daher, dass $\ker f = \{0\}$ ist.
2. Es genügt zu zeigen, dass $f: M \rightarrow M$ bijektiv (bzw. injektiv und surjektiv) ist.

Wegen $\operatorname{mSpec} \mathbb{Z} = \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ prim}\}$ folgt aus der Voraussetzung: Für alle $m \in \operatorname{mSpec} \mathbb{Z}$ ist $L_{\mathbb{Z} \setminus \{m\}} f: M_m \rightarrow M_m$ bijektiv.

Mit der Lokalität (bezüglich mSpec) von Injektivität und Surjektivität von Modulhomomorphismen folgt daraus, dass f bijektiv ist, wie gewünscht.

Aufgabe 6 ($4 + 4 = 8$ Punkte). Sei R ein Ring.

1. Sei P ein projektiver R -Modul. Zeigen Sie, dass dann auch $R \oplus P$ ein projektiver R -Modul ist.
2. Seien $C, D \in \text{Ob}({}_R\mathbf{Ch})$ und seien $f: C \rightarrow D$ und $g: D \rightarrow C$ Morphismen in ${}_R\mathbf{Ch}$ mit $g \circ f \simeq_R \text{id}_C$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $H_n(f): H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ injektiv.

Lösung:

1. Wir verwenden die Charakterisierung projektiver Moduln als direkte Summanden in freien Moduln.

Nach Voraussetzung ist P projektiv. Also gibt es einen freien R -Modul F und einen R -Modul Q mit $P \oplus Q \cong_R F$.

Somit ist

$$(R \oplus P) \oplus Q \cong_R R \oplus (P \oplus Q) \cong_R R \oplus F;$$

dieser R -Modul ist frei, da R und F frei sind.

Also ist der direkte Summand $R \oplus P$ ein projektiver R -Modul.

2. Mit der Funktorialität und Kettenhomotopieinvarianz von $H_n: {}_R\mathbf{Ch} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$ folgt:

$$\begin{aligned} H_n(g) \circ H_n(f) &= H_n(g \circ f) && \text{(Funktorialität)} \\ &= H_n(\text{id}_C) && \text{(Kettenhomotopieinvarianz und } g \circ f \simeq_R \text{id}_C) \\ &= \text{id}_{H_n(C)} && \text{(Funktorialität)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $H_n(f)$ injektiv.