

Wiederholungsklausur Kommutative Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

5. Oktober 2026

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handschriftlich beschriftetes Blatt (DIN A4, doppelseitig, analog, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	12	9	10	9	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Ist $\mathbb{Z}/10 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/60$?
2. Ist der Funktor $\mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ exakt?
3. Ist $\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\mathbf{Ring}} \mathbb{Z}[T]$?
4. Ist der Funktor $\mathbb{Q}(T) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \cdot : {}_{\mathbb{Q}[T]}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}(T)}\mathbf{Mod}$ exakt?

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$, für den $\text{Spec } f: \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$ injektiv ist und $\dim R \neq \dim S$ gilt.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und ein $p \in \text{Spec } R$, so dass R_p noethersch ist, aber R *nicht* noethersch ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein Ideal $q \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $q \neq \mathbb{C}[X, Y]$, das *nicht* primär ist.

Aufgabe 3 ($6 + 4 = 10$ Punkte).

1. Wie beweist man, dass jedes Ideal in einem noetherschen Ring eine Primärzerlegung besitzt? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!
2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes eingehen.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$ Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 \cdot Y)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y - X^2 \cdot Y) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Enthält $\text{Spec } R$ eine abgeschlossene Menge mit genau zwei Elementen? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$.
4. Gibt es ein Ideal $a \subset R$ mit $R/a \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}[X, Y]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein Ring, sei $N \subset R^{2026}$ ein R -Untermodul und es gebe ein $x \in R$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $y \in R$ ist $1 - x \cdot y \in R^\times$
- und $R^{2026} = \{x \cdot v + w \mid v \in R^{2026}, w \in N\}$.

Zeigen Sie, dass $N = R^{2026}$.

2. Sei M ein $\mathbb{Q}[T]$ -Modul mit folgender Eigenschaft: Für alle Primelemente $p \in \mathbb{Q}[T]$ ist $M_{(p)}$ ein flacher $\mathbb{Q}[T]_{(p)}$ -Modul. Zeigen Sie, dass M ein flacher $\mathbb{Q}[T]$ -Modul ist.

Aufgabe 6 ($4 + 4 = 8$ Punkte). Sei R ein Ring.

1. Sei P ein projektiver R -Modul und sei S eine R -Algebra. Zeigen Sie, dass dann $S \otimes_R P$ ein projektiver S -Modul ist.
2. Sei $C \in \text{Ob}({}_R\mathbf{Ch})$ und $f: C \rightarrow C$ ein Morphismus in ${}_R\mathbf{Ch}$ mit $f \circ f \simeq_R \text{id}_C$. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $H_n(f) = 0$, so folgt $H_n(C) \cong_R \{0\}$.