

Wiederholungsklausur Kommutative Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

5. Oktober 2026

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handschriftlich beschriftetes Blatt (DIN A4, doppelseitig, analog, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	12	9	10	9	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Ist $\mathbb{Z}/10 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/60$?
2. Ist der Funktor $\mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ exakt?
3. Ist $\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\mathbf{Ring}} \mathbb{Z}[T]$?
4. Ist der Funktor $\mathbb{Q}(T) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \cdot : {}_{\mathbb{Q}[T]}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}(T)}\mathbf{Mod}$ exakt?

Lösung:

1. *Behauptung.* Nein, es gilt $\mathbb{Z}/10 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6 \not\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/60$.

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{Z}/10 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(10, 6) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/2 \not\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/60. \quad \square$$

2. *Behauptung.* Nein, dieser Funktor ist *nicht* exakt.

Beweis. Der Funktor $\mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ ist nicht exakt, da er im allgemeinen injektive Abbildungen nicht auf injektive Abbildungen abbildet. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 4 \cdot x \end{aligned}$$

injektiv, aber

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} f: \mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \\ x \otimes y &\longmapsto x \otimes 4 \cdot y = 4 \cdot x \otimes y = 0 \otimes y = 0 \end{aligned}$$

ist *nicht* injektiv (denn $\mathbb{Z}/4 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4 \not\cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$). $\square$

3. *Behauptung.* Nein, die Ringe $\mathbb{Z}_{(2)}$ und $\mathbb{Z}[T]$ sind *nicht* isomorph.

Beweis. Isomorphe Ringe haben dieselbe Anzahl an Einheiten. Es gilt jedoch:

- Der Ring $\mathbb{Z}[T]$ besitzt nur genau zwei Einheiten, nämlich 1, -1 .
- Der Ring $\mathbb{Z}_{(2)}$ besitzt unendlich viele Einheiten, z.B. 3^n mit $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4. *Behauptung.* Ja, dieser Funktor ist exakt.

Beweis. Es ist $\mathbb{Q}(T) = (\mathbb{Q}[T] \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Q}[T]$. Somit handelt es sich bei dem gegebenen Funktor um einen Lokalisierungsfunktor und Lokalisierungsfunktoren sind exakt. $\square$

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$, für den $\text{Spec } f: \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$ injektiv ist und $\dim R \neq \dim S$ gilt.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und ein $p \in \text{Spec } R$, so dass R_p noethersch ist, aber R *nicht* noethersch ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein Ideal $q \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $q \neq \mathbb{C}[X, Y]$, das *nicht* primär ist.

Lösung:

1. Die kanonische Inklusion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Ringhomomorphismus. Wegen $\text{Spec } \mathbb{Q} = \{(0)\}$ ist $\text{Spec } f: \text{Spec } \mathbb{Q} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ injektiv. Außerdem ist $\dim \mathbb{Q} = 0$ (da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist) und $\dim \mathbb{Z} \geq 1$ (da, z.B. $(0) \subsetneq (2)$).
2. Sei $R := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ und $p := (0)$. Dann gilt:
 - Der Ring R ist *nicht* noethersch, da z.B. die Kette $(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots$ nicht stationär wird.
 - Da R ein Integritätsring ist, ist $p \in \text{Spec } R$ und $R_p = (R \setminus \{0\})^{-1}R$ ist ein Körper. Insbesondere ist R_p noethersch.
3. Wir betrachten das folgende Ideal von $\mathbb{C}[X, Y]$:

$$q := (X \cdot Y) \subset \mathbb{C}[X, Y]$$

Dann gilt:

- Es ist $q \neq \mathbb{C}[X, Y]$, da $1 \notin q$.
- Das Ideal q ist *nicht* primär, denn: Es gilt $X \cdot Y \in q$, aber $X \notin q$ und $Y^n \notin q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6 + 4 = 10 Punkte).

1. Wie beweist man, dass jedes Ideal in einem noetherschen Ring eine Primärzerlegung besitzt? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!
2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes eingehen.

Lösung:

1. Sei R ein noetherscher Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal. Man zeigt:

- Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und irreduzible Ideale $q_1, \dots, q_n \subset R$ mit

$$a = \bigcap_{j=1}^n q_j,$$

denn: *Angenommen*, es gäbe ein Ideal in R , das *nicht* als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale geschrieben werden kann.

Man betrachtet dann die (nicht-leere!) Menge M aller Ideale in R , die nicht als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale in R geschrieben werden können. Da R noethersch ist, besitzt M ein bezüglich Inklusion maximales Element (welches insbesondere nicht irreduzibel ist). Dies führt man nun zum Widerspruch.

- Jedes irreduzible Ideal in R ist primär, denn: Durch Übergang zum Restklassenring genügt es, nur den Fall des Nullideals zu betrachten.

Seien daher $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 0$. Man betrachtet dann die aufsteigende Kette

$$N(y) \subset N(y^2) \subset \dots$$

von Idealen in R und wendet auf diese Kette an, dass R noethersch ist.

2. Solche Resultate sind zum Beispiel [zwei davon genügen]:

- Das Artin–Tate-Lemma über die Vererbung von endlicher Erzeugtheit von Algebren über noetherschen Ringen.
- Das Zariski-Lemma (Mini-Noether-Normalisierung) über endlich erzeugte Algebren über Körpern.
- Die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes (über maximale Ideale in endlich erzeugten Algebren über Körpern).

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$ Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 \cdot Y)$.

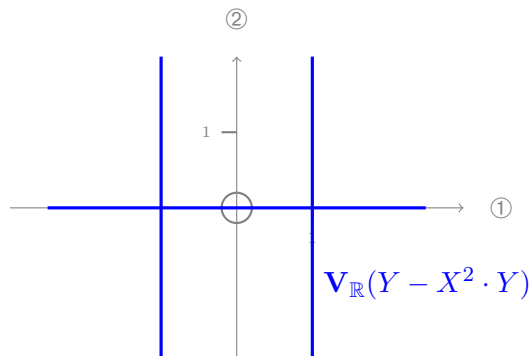
1. Skizzieren Sie $V_{\mathbb{R}}(Y - X^2 \cdot Y) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Enthält $\text{Spec } R$ eine abgeschlossene Menge mit genau zwei Elementen? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$.
4. Gibt es ein Ideal $a \subset R$ mit $R/a \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}[X, Y]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}}(Y - X^2 \cdot Y) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \cdot y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{1, -1\}\}; \end{aligned}$$

somit erhalten wir:



2. *Behauptung.* Ja, $\text{Spec } R$ enthält eine abgeschlossene Menge mit genau zwei Elementen.

Beweis. Sei $M := \{p, q\}$, wobei $p = ([X], [Y])$ und $q := ([X - 1], [Y])$. Dann gilt

- Wegen $p \neq q$ (z.B. durch den Einsetzungshomomorphismus $R \rightarrow \mathbb{C}$ bei $(0, 0)$ ersichtlich) ist $\#M = 2$.

- Die Menge M liegt in $\text{Spec } R$ und ist abgeschlossen, denn: Da maximale Ideale in R abgeschlossene Punkte von $\text{Spec } R$ sind und die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass p und q maximale Ideale von R sind.

Die Ideale p und q in R sind maximal, denn $R/p \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}$ und $R/q \cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}$ sind Körper. $\square$

3. Sei $\pi: \mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow R$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Spec } R &\longrightarrow \{q \in \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y] \mid (Y - X^2 \cdot Y) \subset q\} \\ p &\longmapsto \pi^{-1}(p) \end{aligned}$$

bijektiv (und mit Inklusion von Idealen verträglich).

- Die Ideale (Y) und (X, Y) von $\mathbb{C}[X, Y]$ sind prim (die Restklassenringe sind isomorph zu $\mathbb{C}[X]$ bzw. $\mathbb{C}$, was beides Integritätsringe sind). Wegen $(Y - X^2 \cdot Y) = (Y \cdot (1 - X^2)) \subset (Y) \subsetneq (X, Y)$ ist daher $\dim R \geq 1$.
- Wegen $\dim \mathbb{C}[X, Y] = 2$ und $(0) \in \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$ sowie $(0) \subsetneq (Y - X^2 \cdot Y)$ folgt umgekehrt auch $\dim R \leq 1$.

4. *Behauptung.* Nein, ein solches Ideal gibt es nicht.

Beweis. Sei $a \subset R$ ein Ideal. Dann gilt (aufgrund der Monotonie der Dimension für Restklassenringe und des vorigen Aufgabenteils)

$$\dim R/a \leq \dim R = 1,$$

und damit $\dim R/a \neq 2$.

Wegen $\dim \mathbb{C}[X, Y] = 2$ (da $\mathbb{C}$ ein Körper ist), erhalten wir insbesondere $R/a \not\cong_{\text{Ring}} \mathbb{C}[X, Y]$. $\square$

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein Ring, sei $N \subset R^{2026}$ ein R -Untermodul und es gebe ein $x \in R$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $y \in R$ ist $1 - x \cdot y \in R^\times$
- und $R^{2026} = \{x \cdot v + w \mid v \in R^{2026}, w \in N\}$.

Zeigen Sie, dass $N = R^{2026}$.

2. Sei M ein $\mathbb{Q}[T]$ -Modul mit folgender Eigenschaft: Für alle Primelemente $p \in \mathbb{Q}[T]$ ist $M_{(p)}$ ein flacher $\mathbb{Q}[T]_{(p)}$ -Modul. Zeigen Sie, dass M ein flacher $\mathbb{Q}[T]$ -Modul ist.

Lösung:

1. Wir betrachten das Ideal $a := (x) \subset R$ und den R -Modul $M := R^{2026}/N$.
- Der R -Modul M ist endlich erzeugt, denn M ist ein Quotientenmodul des endlich erzeugten R -Moduls R^{2026} .
 - Es ist $a \subset J(R)$, denn aus der ersten Bedingung folgt $x \in J(R)$.
 - Es gilt $M/a \cdot M \cong_R \{0\}$, denn: Sei $[z] = z + N \in M$ mit $x \in R^{2026}$. Nach der zweiten Bedingung gibt es $v \in R^{2026}$ und $w \in N$ mit $z = x \cdot v + w$. Wegen $w \in N$ gilt in M :

$$[z] = [x \cdot v + w] = [x \cdot v] \in (x) \cdot M = a \cdot M.$$

- Mit dem Lemma von Nakayama erhalten wir somit $M \cong_R \{0\}$.

Nach Konstruktion von M bedeutet dies, dass $N = R^{2026}$.

2. Wegen $\text{mSpec } \mathbb{Q}[T] = \{(p) \mid p \in \mathbb{Q}[T] \text{ prim}\}$ folgt aus der Voraussetzung: Für alle $m \in \text{mSpec } \mathbb{Q}[T]$ ist M_m flach.

Mit der Lokalität (bezüglich mSpec) von Flachheit folgt daraus, dass M ein flacher $\mathbb{Q}[T]$ -Modul ist.

Aufgabe 6 ($4 + 4 = 8$ Punkte). Sei R ein Ring.

1. Sei P ein projektiver R -Modul und sei S eine R -Algebra. Zeigen Sie, dass dann $S \otimes_R P$ ein projektiver S -Modul ist.
2. Sei $C \in \text{Ob}({}_R\mathbf{Ch})$ und $f: C \rightarrow C$ ein Morphismus in ${}_R\mathbf{Ch}$ mit $f \circ f \simeq_R \text{id}_C$. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $H_n(f) = 0$, so folgt $H_n(C) \cong_R \{0\}$.

Lösung:

1. Wir verwenden die Charakterisierung projektiver Moduln als direkte Summanden in freien Moduln.

- Da P ein projektiver R -Modul ist, gibt es eine Menge I und einen R -Modul Q mit $P \oplus Q \cong_R \bigoplus_I R$.
- Die Verträglichkeit des Tensorprodukts $S \otimes_R \cdot$ mit direkten Summen und $S \otimes_R R \cong_S S$ liefern

$$\begin{aligned} (S \otimes_R P) \oplus (S \otimes_R Q) &\cong_S S \otimes_R (P \oplus Q) \cong_S S \otimes_R \bigoplus_I R \\ &\cong_S \bigoplus_I (S \otimes_R R) \cong_S \bigoplus_I S. \end{aligned}$$

- Also ist $S \otimes_R P$ ein direkter Summand des freien S -Moduls $\bigoplus_I S$. Somit ist $S \otimes_R P$ ein projektiver S -Modul.
2. Mit der Funktorialität und Kettenhomotopieinvarianz von $H_n: {}_R\mathbf{Ch} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \circ 0 = H_n(f) \circ H_n(f) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= H_n(f \circ f) && \text{(Funktorialität)} \\ &= H_n(\text{id}_C) && \text{(Kettenhomotopieinvarianz und } f \circ f \simeq_R \text{id}_C) \\ &= \text{id}_{H_n(C)} && \text{(Funktorialität)} \end{aligned}$$

Also ist $H_n(C) \cong_R \{0\}$.