

Probeklausur Kommutative Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Juli 2026

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handschriftlich beschriftetes Blatt (DIN A4, doppelseitig, analog, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	12	9	10	9	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Ist $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10$?
2. Ist der Funktor $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod}$ exakt?
3. Ist $\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\text{Ring}} \mathbb{Z}$?
4. Ist der Funktor $\mathbb{Z}_{(3)} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}_{(3)}}\text{Mod}$ exakt?

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R , für den $\text{mSpec } R$ endlich und $\text{Spec } R$ unendlich ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für ein primäres Ideal $q \subset \mathbb{C}[X, Y]$ mit $\sqrt{q} \neq q$.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring R und eine endlich erzeugte R -Algebra A , die als R -Modul *nicht* endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3 (6 + 4 = 10 Punkte).

1. Wie beweist man, dass das Tensorprodukt mit Kolimiten verträglich ist?
Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!
2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis von $\dim K[X_1, \dots, X_n] \leq n$ eingehen.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$ Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^2) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Ist $\text{Spec } R$ endlich? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$.
4. Ist der Ring R artinsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a/m \cdot a \cong_R \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $a = (0)$ ist.
2. Sei R ein Integritätsring und für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gelte $\dim R_p = 0$. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 6 ($4 + 4 = 8$ Punkte).

1. Sei R ein Ring, sei P ein projektiver R -Modul und sei Q ein direkter Summand von P . Zeigen Sie, dass dann auch Q ein projektiver R -Modul ist.
2. Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \text{Ob}(\mathbb{Z}\text{Ch})$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $S \subset C_n$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$ -Moduls C_n . Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \leq \#S.$$