

Seminar: Open covers and complexity (à la Lusternik–Schnirelmann)

K. Li/C. Löh/M. Uschold

July 2022

For a topological space X , a measure of its complexity is given by the smallest number of contractible open subsets needed to cover X , called the *Lusternik–Schnirelmann category* or LS-category $\text{cat}(X)$. (Despite the name, there is no connection to category theory.) This integer-valued homotopy invariant is difficult to compute in general and therefore approximated by lower and upper bounds, e.g., using (co)homology. A highlight of the seminar will be Lusternik–Schnirelmann’s classical result that every smooth function $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ on a manifold M has at least $\text{cat}(M)$ many critical points. A second goal will be Iwase’s construction of counter-examples to the long standing Ganea conjecture, which predicted that $\text{cat}(X \times S^k) = \text{cat}(X) + 1$, using Hopf invariants. We conclude with applications of the ideas and techniques developed in this seminar to algorithmic problems.

Our main reference will be the book *Lusternik–Schnirelmann category* by Cornea, Lupton, Oprea and Tanré [CLOT03], from where this quote is taken:

“Lusternik–Schnirelmann category is like a Picasso painting. Looking at category from different perspectives produces completely different impressions of category’s beauty and applicability.”

Prerequisites. Basic topology, CW-complexes, homology, fundamental group. Prior exposure to cohomology and basic homotopy theory ((co)fibrations, homotopy groups, etc.) is helpful, but not strictly necessary.

Talks

Basic properties

Talk 1 (Definition of LS-category and basic properties). We define the main concept of this seminar, the *Lusternik–Schnirelmann category* or LS-category. We discuss first examples and some basic properties, such as homotopy invariance and its behavior for unions and wedges.

- Recall the definitions of a null-homotopic map and of contractible spaces [Löh22, Section 1.3.1]
- Definition 1.1 (LS-category), only $\text{cat}(X)$, not subspace category $\text{cat}_X(A)$;
- Example 1.6 (2) (spheres S^n , more generally suspensions ΣX);
- Lemma 1.29 (domination) and Theorem 1.30 (homotopy invariance);
- Lemma 1.25 (open covers vs. based open covers);
- Proposition 1.27 (unions and wedges);

Literature: [CLOT03, Section 1.2 and Section 1.4]

Talk 2 (Upper bounds via covering dimension and homology decomposition). We obtain an upper bound for the LS-category given by the classical covering dimension. For CW-complexes this bound can be improved via mapping cones and homology decompositions.

- Recall: Definition of LS-category;
- Definition on page 3 (covering dimension);
- Remark: covering-dim of CW-complexes is the usual CW-dim;
- Lemma A.4 (refinements of open covers);
- Theorem 1.7 (covering dim is upper bound);
- Theorem 1.32 (mapping cones), stress the importance of this basic property;
- Example 1.33 (improved upper bound via homology decomposition), in particular $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq n$;
- Time permitting: Proposition 1.34 (double mapping cylinders) and Remark 1.35;

Literature: [CLOT03, Section 1.2 and Section 1.4]

Talk 3 (Lower bound via cup-products). A lower bound for the LS-category is provided by non-trivial cup-products on cohomology. We recall these algebraic invariants in detail. This allows us to determine the precise value of the LS-category for several interesting examples.

- Recall: construction and basic properties of the relative cohomology [Hat02, Section 3.1].
- relative cup-product on relative cohomology, construction and basic properties [Hat02, Section 3.2];
- cohomology ring structure of n -torus T^n integrally, and of $\mathbb{R}P^n \bmod 2$, and $\mathbb{C}P^n$ integrally [Hat02, Section 3.2];
- Definition 1.4 (cup-length);
- Proposition 1.5 (cup-length is lower bound);
- Examples 1.6, 1.8, and 1.33 (precise value of LS-cat for T^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$);

Literature: [CLOT03, Section 1.2 and Section 1.5]

Critical points

Talk 4 (Subspace category and Morse theory). We discuss a version of the LS-category for subspaces that will be used in the proof of the Lusternik–Schnirelmann theorem (Talk 5). An instructive special case of the theorem is the following: every Morse function on a manifold M has at least $\text{cat}(M)$ many critical points.

- Definition 1.1 (subspace category $\text{cat}_X(A)$);
- Proposition 1.10 (open covers vs. closed covers), state without proof;
- Lemma 1.13 (properties of subspace category);
- Recall: Morse theory (Appendix A.2), draw a picture to illustrate (e.g., of the torus with the usual height function with four critical points) [Mil63, Chapter 1.1];
- Deduce: $\text{cat}(M) + 1 \leq \widetilde{\text{Crit}}(M)$ (page 7);

Literature: [CLOT03, Section 1.2 and Appendix A.2]

Talk 5 (The Lusternik–Schnirelmann theorem). We reach a highlight of the seminar: the classical Lusternik–Schnirelmann theorem, according to which every smooth function on a manifold M has at least $\text{cat}(M)$ many critical points.

- Theorem 1.15 (Lusternik–Schnirelmann theorem) and Definition 1.16 (condition C);
- Lemma 1.19 (local deformation);
- Theorem 1.17 (global deformation), state without proof;
- Proposition 1.21 (minimax) and Example 1.22;
- Proposition 1.23;
- Proof of Theorem 1.15;
- Example 1.24 (torus);

Literature: [CLOT03, Section 1.3]

Talk 6 (Axiomatic approach). We present an axiomatic approach to the subspace LS-category and the Lusternik–Schnirelmann theorem (Talks 4 and 5), making clear which properties and conditions are really needed. This is an instance of abstraction, a valuable process in general.

- Definition 1.68 (abstract category);
- Theorem 1.70 (subspace category is the maximal abstract category);
- Definition 1.71 (continuity);
- Definition 1.72 (generalised Palais–Smale condition);
- Theorem 1.73 (Lusternik–Schnirelmann theorem, general form);
- Lemma 1.74 (example of an abstract category, cat_f^{ab});

Literature: [CLOT03, Section 1.7]

Homotopy theoretical formulations

Talk 7 (Products and basic homotopy theory). The statement of the Ganea conjecture on the LS-category of products is extremely easy to understand but remained open for almost 30 years. The second goal of the seminar will be to construct Iwase’s counter-examples (Talk 13). We start gently by recalling some basic homotopy theory that will be used in the following talks.

- Theorem 1.37 (products);
- Examples 1.38 and 1.39 (Moore spaces);
- Conjecture 1.40 (Ganea conjecture, 1971), briefly mention Iwase’s counter-examples (1998) of the form $S^q \cup_{\alpha} e^{r+1}$ for appropriate maps $\alpha: S^q \rightarrow S^r$. We will see these later in detail (Talk 13);
- Recall: basic homotopy theory ((co)fibrations, homotopy groups, Σ - Ω -adjunction [Hat02, p. 395], homotopy pushouts/pullbacks, [CLOT03, Theorem B.27], cube lemma [CLOT03, Theorem B.29] [Hat02, Chapter 4];

Literature: [CLOT03, Section 1.5]

Talk 8 (Whitehead formulation). Finding alternative definitions of LS-category will allow us to apply different tools and to prove better results. We begin with the definition of Whitehead in terms of the fat wedge. Of course we need to show that this coincides with the original definition of Lusternik–Schnirelmann.

- Definition 1.48 (Whitehead definition of LS-cat) and Example 1.49 (co- H -spaces);
- Theorem 1.50 (connectivity upper bound) and Examples 1.51 and 1.52;
- Lemma 1.53, state without proof;
- Theorem 1.55 (coincidence of definitions);
- Theorem 1.57 (sections) and Example 1.58 ($\tilde{G}_0(X)$);
- Definition 1.59 (fibre-cofibre construction);

Literature: [CLOT03, Section 1.6]

Talk 9 (Ganea formulation). Whitehead’s definition of LS-category (Talk 8) leads to a third equivalent one: Ganea’s definition in terms of sections of the Ganea fibrations. This homotopy theoretical description is extremely important because it allows for a variety of new approaches, as we will see in the talks to come.

- Definition 1.59 (fibre-cofibre construction), Proposition 1.60 (functoriality), and Example 1.61 ($G_1(X)$);
- Definition 1.64 (Ganea definition of LS-cat);
- Theorem 1.63 (coincidence of definitions);
- Remark 1.67 (summary of the results; based cat vs. unbased cat);

- Theorem 1.65;

Literature: [CLOT03, Section 1.6]

Talk 10 (Improved lower bounds via Ganea's formulation). Ganea's definition of LS-category (Talk 9) opens up a whole zoo of new lower bounds, which improve upon the cup-length lower bound. This talk has mostly the character of a survey of these invariants but you should also give proofs of some statements.

- page 48: compatibility with products and with cone attachments, table at bottom of page, (e.g., fill in the table along the talk);
- Definition 2.7 (Toomer invariant) and Remark 2.8 (1) and (2); compatibility of the Toomer invariant with products (Theorem 2.9)
- Definition 2.13 (weak category) and Remark 2.14; compatibility with cone attachments (Proposition 2.16)
- Definition 2.18 (conilpotency) and Remark 2.19;
- Definition 2.31 (σ -category) and Remark 2.33;
- Choose and state (without proof) some nice results that can be obtained using these invariants;
- Theorem 2.49 (only comparison of the lower bounds);
- Time permitting: Proposition 2.50 (obstruction theory);

Literature: [CLOT03, Chapter 2]

Hopf invariants

Talk 11 (Hopf invariants). We move towards Iwase's counter-examples to the Ganea conjecture, which relies on Hopf invariants. We briefly review the classical Hopf invariants for maps between spheres and extend the definition to larger classes of maps using Ganea's definition of LS-category (Talk 9).

- Recall: classical Hopf invariants of maps $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ [Hat02, Section 2.B] [CLOT03, Section 6.2];
- Definition 6.7 (Hilton, Hopf invariants of maps $S^r \rightarrow S^n$);
- Proposition 6.8 (obstruction to distributivity);
- Definition 6.14 (Iwase, Hopf invariant of maps $S^r \rightarrow X$) and Remark 6.15;
- Proposition 6.17 (basic properties of Hopf invariants);

Literature: [CLOT03, Section 6.2 and Section 6.3]

Talk 12 (Hopf invariants and LS-category). We show how Hopf invariants of an attaching map $\alpha: S^r \rightarrow X$ relate to the space $X \cup_\alpha e^{r+1}$ having small LS-category.

- Theorem 6.19 (Hopf invariants and LS-category) and Remark 6.20 (ii);

- Corollary 6.21, Corollary 6.22, and Lemma 6.24 (unique section);
- Proposition 6.25 (compatible sections);
- Lemmas 6.26, 6.27, and 6.28 (technical lemmas), state without proof;
- Proof of Theorem 6.19;

Literature: [CLOT03, Section 6.4]

Talk 13 (Iwase's counter-example to the Ganea conjecture). Finally, with the technology of Hopf invariants (Talks 11 and 12), we will see Iwase's famous counter-examples to the Ganea conjecture. Though some input, relying on deep results on homotopy groups of spheres, will need to be treated as a blackbox.

- Recall: Ganea conjecture (Conjecture 1.40);
- Theorem 6.51 (Iwase's counter-example);
- Example 6.52 (existence of examples), time permitting: say something about these examples, or just blackbox it [CLOT03, Section 6.8]
- Lemma 6.55;
- Proof of Theorem 6.51 (the proof uses Proposition 6.25, Proposition 6.17, Lemma 6.28 from Talks 11 and 12);

Literature: [CLOT03, Section 6.8]

Application: Complexity of algorithms

Talk 14 (Smale's complexity of algorithms). We conclude the seminar with an unexpected application: We use LS-category to determine the complexity of algorithms finding zeros of polynomials.

- Describe the root-finding problem.
- Definition 9.22 (algorithm tree)
- State Theorem 9.24 (upper bound for the complexity)
- Introduce the sectional category secat and state its properties needed for the Theorems in Section 9.4. [CLOT03, Section 9.3]
- Determine the precise value of the topological complexity in some cases (Theorem 9.25 and 9.26 and Corollary 9.27) and prove these statements.

Literature: [CLOT03, Section 9.4]

Ablauf des Seminars

Notwendig für eine erfolgreiche Teilnahme sind:

- Studienleistung: Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Möglichst eine regelmäßige und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout (Englisch) von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Prüfungsleistung: Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese sollte bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden. (Wird das Seminar als Proseminar oder als unbenotetes Seminar belegt, ist diese schriftliche Ausarbeitung nicht verpflichtend, aber dringend empfohlen.) Die Ausarbeitung kann auf Deutsch oder Englisch verfasst sein.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen/Modulkatalogen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://www.ams.org/mathscinet>

<http://books.google.com>

<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen, den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem $\text{\LaTeX}$ besser kennenzulernen; dafür werden auch $\text{\LaTeX}$ -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
https://loeh.app.ur.de/teaching/catsem_ws2223/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

Im folgenden steht *Tafel* bzw. *Folie* für das verwendete Präsentationsmedium (egal ob analog oder digital).

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind. Die logische Struktur sollte immer aus dem Tafelbild erkennbar sein.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.

- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.
- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

References

- [CLOT03] Octav Cornea, Gregory Lupton, John Oprea, and Daniel Tanré. *Lusternik-Schnirelmann category*, volume 103 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Löh22] Clara Löh. Algebraic topology. An introductory course. https://loeh.app.ur.de/teaching/topologie1_ws2122/lecture_notes.pdf, 2022.
- [Mil63] John W. Milnor. *Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*, volume 51 of *Ann. Math. Stud.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.