Topologische Grundlagen

Katharina Lilienbeck 22. Oktober 2008

---

1 Topologische Räume

Definition 1.1. Ein **topologischer Raum** (X, O) ist eine Menge X und eine Menge O von Teilmengen von X, so dass gilt:

- $U_i \in O$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in O$
- $U_1, U_2 \in O \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in O$.
- $X, \emptyset \in O$

O heißt die **Topologie** von (X, O). Die Mengen $U \subseteq X$ mit $U \in O$ heißen die **offenen Mengen**.

Beispiel 1.2. Standard-Topologie von $\mathbf{R}^d$: $U \subseteq \mathbf{R}^d$ ist genau dann offen, wenn für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass der ε-Ball um x in U enthalten ist.

Definition 1.3. Sei (X, O) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so heißt die Topologie $O_Y := \{U \cap Y \mid U \in O\}$ auf Y die **Teilraumtopologie** und der topologische Raum (Y, O_Y) heißt **Teilraum** von (X, O).

Definition 1.4. Seien $(X_1, O_1), (X_2, O_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \longrightarrow X_2$ heißt **stetig**, falls Urbilder offener Mengen offen sind, also $f^{-1}(V) \in O_1$ für alle $V \in O_2$.

Aufgabe 1.5. Zeige, dass Definition 1.4 für Abbildungen $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ zum ε–δ-Kriterium der Stetigkeit auf $\mathbf{R}$ äquivalent ist.

Definition 1.6. Ein **Homöomorphismus** topologischer Räume (X_1, O_1) und (X_2, O_2) ist eine Bijektion $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$, derart, dass φ und φ^{-1} stetig sind.
Man schreibt: $X_1 \cong X_2$.

Definition 1.7. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Aufgabe 1.8. Zeige, dass Definition 1.4 auch für abgeschlossene Mengen gilt, also dass eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Definition 1.9. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen sind, die offen und abgeschlossen sind.
X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ einen Weg von a nach b, d.h. eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha(1) = b$, gibt.

Seminar „Diskrete Geometrie und Kombinatorik“, WS 2008/2009, WWU Münster

Definition 1.10. Ein topologischer Raum (X, O) heißt **kompakt**, falls für jede Familie U offener Mengen von X mit $\bigcup U = X$ eine endliche Teilfamilie $U_0 \subseteq U$ mit $\bigcup U_0 = X$ existiert.

2 Homotopieäquivalenz und Homotopie

Definition 2.1. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \longrightarrow Y$ heißen **homotop**, falls eine stetige Interpolation $\{f_t : X \to Y\}_{t \in [0,1]}$ zwischen ihnen existiert, d.h.

$$\begin{aligned} &f_\cdot : [0,1] \times X \to Y \text{ ist stetig} \\ &f_0 = f \\ &f_1 = g \end{aligned}$$

Man schreibt dann $f \simeq g$. Eine Abbildung $X \longrightarrow Y$ heißt **nullhomotop**, falls sie zu einer konstanten Abbildung homotop ist.

Definition 2.2. Eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$ ist. In diesem Fall heißen X und Y **homotopieäquivalent**. Man schreibt $X \simeq Y$.
Ein Raum, der zu einem einzigen Punkt homotopieäqivalent ist, heißt **kontrahierbar**.

Definition 2.3. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Dann heißt eine Familie $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ stetiger Abbildungen $f_t : X \longrightarrow X$ eine **Deformationsretraktion** von X auf Y, falls:

- $f_0 = id_X$
- $\forall_{t \in [0,1]}\ \forall_{y \in Y}\, f_t(y) = y$
- $f_1(X) = Y$

Existiert eine solche Deformationsretraktion, so heißt Y **Deformationsretrakt** von X.

Beispiel 2.4. Allgemein definiert man die n-Späre S^n durch

$$S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \big| \|x\| = 1\}.$$

Dann ist $S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ein Deformationsretrakt.

Bemerkung 2.5.

1. Ist Y Deformationsretrakt von X, so sind X und Y homotopieäquivalent.
2. Seien X und Y topologische Räume. X und Y sind genau dann homotopieäquivalent, wenn es einen Raum Z gibt, so dass X und Y Deformationsretrakte von Z sind.

Aufgabe 2.6. Zeige Bemerkung 2.5.1 mithilfe von Definition 2.3.

3 Quotientenräume

Definition 3.1. Sei (X, O_X) ein topologischer Raum und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf seinen Elementen. Die **Quotiententopologie** auf der Menge $X/\approx$ der Äquivalenzklassen wird definiert durch: $O_q := \{U \subseteq X/\approx \mid q^{-1}(U) \in O_X\}$ mit $q : X \longrightarrow X/\approx$. Hierbei ist q die **Quotientenabbildung**, die jedes $x \in X$ auf seine Äquivalenzklasse $[x]_\approx$ abbildet. $(X/\approx, O_q)$ heißt **Quotientenraum** von X.

Beispiel 3.2. Klebt man die beiden Endpunkte des Einheitsintervalls zusammen, so erhält man einen Kreis, also $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$.

Aufgabe 3.3. Allgemein sei der Einheitsball B^n durch

$$B^n := \{x \in \mathbf{R}^n \big| \|x\| \leq 1\}$$

definiert. Zeige: Generell gilt

$$B^n/S^{n-1} \cong S^n.$$

Beispiel 3.4. Sei $U = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat. Durch Zusammenkleben der vertikalen Ränder erhält man $U/\{(0,y),(1,y)\}_{y\in[0,1]}$, also die Oberfläche eines Zylinders. Klebt man auch die horizontalen Ränder zusammen, so erhält man:

- bei Identifizierung von $(x,0)$ mit $(x,1)$ für alle $x \in [0,1]$ die Oberfläche eines Torus;

- bei Identifizierung von $(x,0)$ mit $(1-x,1)$ die Oberfläche der Kleinschen Flasche.

Bemerkung 3.5 (*Universelle Eigenschaft*)**.** Sei X ein topologischer Raum und $X/\approx$ sein Quotientenraum mit der Quotientenabbildung q. Sei nun Y ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X/\approx \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ q$ stetig ist:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f\circ q"] & \\ X/\approx \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Literatur

[1] A. Bartels. *Vorlesung zur Algebraischen Topologie I*, SS 2008

[2] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005.

[3] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.