Seminar
„Diskrete Geometrie und Kombinatorik, ein topologischer Zugang“

PD Dr. M. Joachim/Dr. C. Löh Juli 2008

Einige klassische Resultate der Kombinatorik, der diskreten Geometrie und der theoretischen Informatik kann man elegant mittels Methoden der Topologie erhalten; zum Beispiel können Teilungs- und Färbungsprobleme oder die Frage, ob sich gewisse Graphen in die Ebene einbetten lassen in topologische Probleme übersetzt werden, die sich dann mit Mitteln der algebraischen Topologie lösen lassen.

Zum Beispiel sind Graphen ein Spezialfall von schönen topologischen Räumen, sogenannten simplizialen Komplexen. Einbettungsprobleme für Graphen sind also Probleme über Abbildungen von simplizialen Komplexen. Die Topologie verfügt über einen Werkzeugkasten, mit dem simpliziale Komplexe und simpliziale Abbildungen gut analysiert werden können. Ein solches Werkzeug ist zum Beispiel der Satz von Borsuk-Ulam über Abbildungen von der n-Sphäre nach $\mathbf{R}^n$, welcher eine zentrale Rolle in diesem Seminar spielen wird.

In diesem Seminar werden wir die entsprechenden topologischen Methoden schrittweise einführen und damit klassische Fragestellungen aus der diskreten Geometrie behandeln. Ziel der Veranstaltung ist es auch, aufzuzeigen, wie vielfältig theoretische Mathematik (und die Topologie im Besonderen) in anwendungsnäheren Bereichen der Mathematik zum Einsatz kommt.

Themen

Im wesentlichen werden wir dem Buch *Using the Borsuk-Ulam Theorem* von Jiří Matoušek folgen.

Vortrag 1 (Grundlagen der Graphentheorie; 15.10.2008)**.** Grundbegriffe der Graphentheorie; chromatische Zahl; planare Graphen; Satz von Kuratowski (ohne Beweis); evtl. Minoren und der Satz von Wagner.
Literatur: Alle Bücher über Graphentheorie, z.B. [3, Kapitel 4.2, 4.4, 5.1, 5.2]

Vortrag 2 (Topologische Grundlagen; 22.10.2008)**.** Grundbegriffe aus der Topologie (topologische Räume, Stetigkeit, Kompaktheit, Zusammenhang); Beispiele für topologische Räume (insbesondere metrische Räume); Quotientenräume (inklusive universeller Eigenschaft); Homotopie(äquivalenz).
Literatur: [6, Kapitel 1.1–1.2, Kapitel 4.1], [5], [2]

Vortrag 3 (Simpliziale Komplexe – kombinatorische Topologie; 29.10.2008)**.** Geometrische simpliziale Komplexe; Triangulierungen; (abstrakte) simpliziale Komplexe; simpliziale Abbildungen; geometrische Realisierung simplizialer Komplexe; Quotienten von simplizialen Komplexen; Beispiele simplizialer Komplexe und simplizialer Abbildungen; simpliziale Approximation; Zusammenhang mit partiell geordneten Mengen.
Literatur: [6, Kapitel 1.3–1.7, Kapitel 4.1], [2]

Vortrag 4 (Der Satz von Borsuk-Ulam; 5.11.2008)**.** Verschiedene Formulierungen des Satzes von Borsuk-Ulam; Äquivalenz dieser Formulierungen; Brouwerscher Fixpunktsatz; Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam und des Brouwerschen Fixpunktsatzes.
Literatur: [6, Kapitel 2.1–2.2]

Vortrag 5 (Das Lemma von Tucker; 12.11.2008)**.** Verschiedene Formulierungen des Lemmas von Tucker; Äquivalenz zum Satz von Borsuk-Ulam; kleine Einführung in simpliziale Homologie mit $\mathbf{Z}/2$-Koeffizienten; Beweis des Lemmas von Tucker über den Abbildungsgrad.
Literatur: [6, Kapitel 2.3–2.4], [2], [4]

Vortrag 6 (Borsuks Vermutung; 19.11.2008)**.** Formulierung von Borsuks Vermutung und Zusammenhang mit dem Satz von Borsuk-Ulam; Gegenbeispiel von Kahn und Kalai (mit Beweis).
Literatur: [1, Kapitel 14]

Vortrag 7 (Das Sandwich-Theorem und Aufteilung von Ketten; 26.11.2008)**.** Wiederholung der benötigten maßtheoretischen Grundbegriffe; Sandwich-Theorem (und Verallgemeinerung) mit Beweis; Sandwich-Theorem für diskrete Mengen mit Beweis; Aufteilung von farbigen Ketten.
Literatur: [6, Kapitel 3.1–3.2], [8]

Vortrag 8 (Die Kneser-Vermutung; 3.12.2008)**.** Wiederholung der chromatischen Zahl von Graphen; Formulierung der Kneser-Vermutung; Kneser-Graphen; Satz von Lovász-Kneser mit Beweis; Satz von Dol'nikov und Satz von Schrijver (wenn möglich mit Beweis).
Literatur: [6, Kapitel 3.3–3.5]

Vortrag 9 (Verallgemeinerte Antipoden und der $\mathbf{Z}/2$-Index; 10.12.2008)**.** $\mathbf{Z}/2$-Räume, (freie) $\mathbf{Z}/2$-Operationen, $\mathbf{Z}/2$-Abbildungen; Beispiele; $\mathbf{Z}/2$-Index; Beispiele für den $\mathbf{Z}/2$-Index; Eigenschaften des $\mathbf{Z}/2$-Index (insbesondere auch die Verbindung mit Joins und k-Zusammenhang) mit Beweis.
Literatur: [6, Kapitel 4.2–4.3, Kapitel 5.2–5.3]

Wiederholung (17.12.2008)**.** Anstelle eines Vortrags wird eine Frage- und Wiederholungsstunde stattfinden.

Vortrag 10 (Nicht-Einbettbarkeit I – topologisches Radon-Theorem; 7.1.2009)**.** Topologisches Radon-Theorem mit Beweis; reduzierte Joins (zur Motivation evtl. auch reduzierte Produkte); Beweis, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist.
Literatur: [6, Kapitel 5.1, (5.4), 5.5.]

Vortrag 11 (Nicht-Einbettbarkeit II – Satz von van Kampen-Flores; 14.1.2009)**.** Satz von van Kampen-Flores mit Beweis; Beweis, dass K_5 nicht planar ist; Bier-Sphären; Ungleichung von Sarkaria.
Literatur: [6, Kapitel 5.1, 5.6, 5.7]

Vortrag 12 (Nicht-Einbettbarkeit III – Kneser-Färbungen und Abschätzungen der chromatische Zahl; 21.1.2009)**.** Der Färbungs-/Einbettungssatz von Sarkaria mit Beweis; Beispiele für daraus folgende Nicht-Einbettbarkeitsresultate (insbesondere $K_{3,3}$ und $\mathbf{R}P^2$); untere Schranke für die chromatische Zahl eines Graphen mit Beweis.
Literatur: [6, Kapitel 5.8–5.9]

Vortrag 13 (G-Index; 28.1.2009)**.** Definition von G-Räumen, G-Abbildungen und Beispiele; Definition des G-Index und Beispiele; Eigenschaften des G-Index; Reduzierte Joins; Aufteilung von farbigen Ketten auf viele Diebe (mit Beweis).
Literatur: [6, Kapitel 6.1–6.4]

Vortrag 14 (Tverberg-Theoreme; 4.2.2009)**.** Tverberg-Partitionen; topologisches Tverberg-Theorem mit Beweis; viele Tverberg-Partitionen; Kneser-Färbungen; gefärbte Tverberg-Theoreme (mit Beweis).
Literatur: [6, Kapitel 6.5–6.8]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit.
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Für Studenten aus den Bachelor-Studiengängen wird der Vortrag benotet; für alle anderen Teilnehmer wird der Schein nicht benotet.
- Für Bachelor-Studenten: Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Versuchen Sie, Definitionen geometrisch zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkosistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [7]; wir stellen für das Handout eine LaTeX-Vorlage zur Verfügung:
  wwwmath.uni-muenster.de/u/clara.loeh/discgeosem_ws0809/handout.tex

– Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

– Weitere Hinweise zur Vorbereitung bzw. zum Halten von Seminarvorträgen finden sich auch auf der Homepage von A. Bartels: wwwmath.uni-muenster.de/u/bartelsa/teaching/knotenSS08/vortraege.pdf

Literatur

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004.

[2] M.A. Armstrong, *Basic Topology*, korrigierter Nachdruck des Originals von 1979, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.

[3] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. Online verfügbar unter http://www.math.cornell.edu/~hatcher/.

[5] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005.

[6] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.

[7] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

[8] W. Rudin. *Real and complex analysis*, dritte Auflage, McGraw-Hill Book Co., 1987.