1 Grundlagen

Definition 1.1 (k-dimensionaler Simplex)**.** Seien $v_0, \dots, v_k \in \mathbf{R}^d$ affin unabhängig. Dann heißt $conv(v_0, \dots, v_k)$ *k-dimensionaler Simplex.*

Definition 1.2 (Eckenmenge eines Simplizes:)**.** Sei σ ein Simplex mit Ecken $v_0, \dots, v_k$. Dann heißt $V(\sigma) = \{v_0, \dots, v_k\}$ *Eckenmenge* von σ.

Definition 1.3 (Dimension eines Simplizes)**.** Sei σ ein Simplex. Dann ist die *Dimension von σ* definiert als $\dim(\sigma) := |V(\sigma)| - 1$

Beispiel 1.4.

- 0-Simplex: Punkt.
- 1-Simplex: Strecke.

Definition 1.5 (Seitenfläche eines Simplizes)**.** Sei σ ein Simplex. $A \subset V(\sigma)$. Dann heißt $conv(A)$ *Seite* oder *Fläche* von σ.

Bemerkung 1.6. Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Seite eines Simplizes.

Bemerkung 1.7. Ein Simplex ist eine seiner Seiten.

Aufgabe 1.8. Zeige, jede Fläche eines Simplizes ist wieder ein Simplex.

Definition 1.9 (simplizialer Komplex)**.** Sei $\Delta \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Simplexen. Δ heißt *simplizialer Komplex* falls folgende Eigenschaften gelten:

- für alle Simplizes $\sigma \in \Delta$ sind alle Seiten von σ in Δ
- $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ ist Seite von σ_1 und σ_2.

Definition 1.10 (Dimension eines simplizialen Komplexes)**.** Sei Δ ein simplizialer Komplex. Dann ist die *Dimension* $\dim(\Delta) := \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$.

Definition 1.11 (Eckenmenge eines simplizialen Komplexes)**.** Für einen simplizialen Komplex Δ ist die *Eckenmenge* $V(\Delta)$ definiert als $V(\Delta) := \cup_{\sigma \in \Delta} V(\sigma)$.

Definition 1.12 (Polyeder eines simplizialen Komplexes)**.** Für einen simplizialen Komplex Δ ist der *Polyeder* von Δ definiert durch $||\Delta|| := \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$.

Beispiel 1.13. Für $\dim(\Delta) = 1$ ist Δ Graph.

Seminar „Diskrete Geometrie und Kombinatorik“, WS 2008/2009, WWU Münster

Definition 1.14 (Teilkomplex)**.** Sei Δ ein simplizialer Komplex. Eine Menge $A \subset \Delta$ heißt *Teilkomplex oder Unterkomplex*, falls A die Bedingungen aus 1.9 erfüllt.

Definition 1.15 (Träger eines Elementes)**.** Sei Δ ein simplizialer Komplex und sei $x \in ||\Delta||$. Dann existiert genau ein Simplex $\sigma = conv(\{v_0, \dots, v_l\}) \in \Delta$ mit x liegt im inneren von σ. Wir nennen $tr(x) := \sigma$ den *Träger* von x.

Definition 1.16 (Triangulierbar)**.** Ein topologischer Raum X heißt *triangulierbar*, falls es einen simplizialen Komplex Δ gibt mit $||\Delta|| \cong X$.

Definition 1.17 (abstrakter simplizialer Komplex)**.** Sei V eine endliche Menge. Ein Tupel $K = (V, E)$ heißt *abstrakter simplizialer Komplex*, falls $E \subset \mathcal{P}(V)$ und für alle $F \in E$ gilt: $G \subset F \;\Rightarrow\; G \in E$.

Satz 1.18. *Jeder geometrische simplizialer Komplex bildet einen abstrakten simplizialen Komplex.*

Definition 1.19 (Geometrische Realisierung)**.** Sei Δ ein geometrischer simplizialer Komplex und sei K sein abstrakter simplizialer Komplex. Dann heißt $||\Delta||$ (eine) *geometrische Realisierung* von K.

Definition 1.20 (Simpliziale Abbildungen)**.** Seien K, K' simpliziale Komplexe. Eine Abbildung $V(K) \to V(K')$ heißt *simplizial*, falls Simplizes auf Simplizes abgebildet werden.
Ein *simplizialer Isomorphismus* ist eine bijektive simpliziale Abbildung.

Definition 1.21 (affine Erweiterung)**.** Seien L,K simpliziale Komplexe und sei $f : V(L) \mapsto V(K)$ eine simpliziale Abbildung. Die Abbildung $||f|| : ||L|| \to ||K||$, $\sum \alpha_i v_i \mapsto \sum \alpha_i f(v_i)$ heißt *affine Erweiterung* von f.

Lemma 1.22. *Seien L,K simpliziale Komplexe und sei $f : V(L) \to V(K)$ eine simpliziale Abbildung.*

- $||f|| : ||L|| \to ||K||$ *ist stetig.*
- f *injektiv* $\Rightarrow$ $||f||$ *injektiv.*
- f *Isomorphismus* $\Rightarrow$ $||f||$ *Homöomorphismus.*

Aufgabe 1.23. Zeigen Sie die Aussagen des obigen Lemmas.

Satz 1.24. *Jeder d-dimensionale simplizialer Komplex hat eine Realisierung im* $\mathbf{R}^{2d+1}$.

2 Simpliziale Approximation

Definition 2.1 (geordneter Simplex)**.** Sei P eine geordnete Menge. Der *geordnete Simplex* $\Delta(P) = (V, E)$ ist gegeben durch:

$$V = P$$

$$E = \{X \subset P : \text{X ist linear geordnet}\}.$$

Definition 2.2 ((geordnete) Seitenmenge eines Simplizes)**.** Sei K ein simplizialer Komplex. Die *Seitenmenge* ist gegeben durch:
$P(K) = \{\sigma \subset K : \sigma \neq \emptyset\}$, geordnet durch Inklusion.

Definition 2.3 (baryzentrische Unterteilung)**.** Die baryzentrische Unterteilung K' eines simplizialen Komplexes K ist gegeben durch den geordneten Komplex der Seitenmenge von K.
Wir setzen $K^{i+1} = (K^i)'$.

Aufgabe 2.4. Sei K ein abstrakter simplizialer Komplex , K' seine baryzentrische Unterteilung. Zeige, die geometrische Realisierung von K ist homöomorph zur geometrische Realisierung von K' ist.

Definition 2.5 (Simpliziale Approximation)**.** Seien L, K simpliziale Komplexe, $f : ||L|| \to ||K||$ eine stetige Abbildung und $g : L \to K$ eine simpliziale Abbildung, dann heißt *g simpliziale Approximation von f, falls für alle $x \in ||L||$ gilt: $||g||(x) \in ||tr(f(x))||$*

Satz 2.6. *Seien L, K simpliziale Komplexe, $f : ||L|| \to ||K||$ eine stetige Abbildung, dann gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ so, dass eine simpliziale Approximation $||L^n|| \to ||K||$ zu f existiert.*

Lemma 2.7. *Seien L, K simpliziale Komplexe, $f : ||L|| \to ||K||$ eine stetige Abbildung und $s : ||L^n|| \to ||K||$ eine simpliziale Approximation zu f.
Dann sind f, s homotop.*

3 Quotientenräume

Satz 3.1. *Sei K ein simplizialer Komplex, X eine geometrische Realisierung und sei $L \subset K$ ein Teilkomplex mit Realisierung A derart, dass A kontrahierbar ist.
Dann ist $X/A \simeq X$.*

Definition 3.2 (Join von simplizialen Komplexen)**.** Seien L,K simpliziale Komplexe. Der *Join* $L * K$ wird definiert durch $L * K = (V, E)$ mit $V = V(L) \sqcup V(K)$ und $E = \{F \sqcup G : F \in L, G \in K\}$.

Definition 3.3 (Join von Räumen)**.** Für zwei topologische Räume X,Y wird ihr *Join* $X * Y$ definiert durch: $X * Y = X \times Y \times [0, 1]/ \approx$ mit $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ und $\forall x, x' \in X, y, y' \in Y$ $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$.

Satz 3.4. *Seien L,K simpliziale Komplexe. Dann gilt: $||L|| * ||K|| \cong ||L * K||$.*

Literatur

[1] *M.A. Armstrong,* Basic Topology*, korrigierter Nachdruck des Originals von 1979, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.*

[2] *J. Matoušek.* Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler,* Universitext*, Springer, 2003.*