5.11.2008
Olga Varghese

Handout

Der Satz von Borsuk - Ulam

Der Satz von Borsuk - Ulam wurde von Stanislaw Ulam vermutet und 1933

durch Karol Bursuk bewiesen.

1. Definition:

$B^n := \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 \leq 1\} \; \forall n \geq 1$

$S^n := \delta B^{n+1} = \{\left(x_1, \ldots x_{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1{}^2 + \ldots + x_{n+1}{}^2 = 1\} \; \forall n \geq 0$

2. Definition:

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$
Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt ungerade, genau dann wenn gilt

$$f(-x) = -f(x) \; \forall x \in X$$

3. Beispiel:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$

(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

4. Definition:

Ein Paar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ heißt antipodal, falls

$$x_1 = -x_2$$

5. Beispiel:

$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1\}$

$((0,1), (0, -1))$

Zwei Punkte auf der Sphäre heißen antipodal, wenn sie in genau engegengesetzte Richtungen vom Mittelpukt liegen.

6. Satz: (Borsuk – Ulam)

Für $n \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Für jede stetige Abb. $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$
2) Für jede ungerade stetige Abb. $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = 0$
3) Es existiert keine ungerade stetige Abb. $f: S^n \to S^{n-1}$
4) Es existiert keine stetige Abb. $f: B^n \to S^{n-1}$ welche ungerade auf dem Rand $\delta B^n = S^{n-1}$ ist.
5) Für jede Überdeckung von S^n mit $(n + 1)$ – abgeschlossenen Mengen $F_1, \ldots, F_{n+1}$ existiert mindestens eine Menge F_i, die ein antipodales Paar enthält, d.h. $(-F_i) \cap F_i \neq \varnothing$ für ein $1 \leq i \leq n + 1$
6) Für jede Überdeckung von S^n mit $(n + 1)$ – offenen Mengen $U_1, \ldots, U_{n+1}$ existiert mindestens eine Menge U_i, die ein antipodales Paar enthält, d.h. $(-U_i) \cap U_i \neq \varnothing$ für ein $1 \leq i \leq n + 1$

Beweisidee:

Man zeigt die Äquivalenz der Aussagen wie folgt:

1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) 5) $\Leftrightarrow$ 6)
1) $\Rightarrow$ 5)
5) $\Rightarrow$ 3)

Borsuk – Ulam 2) zeigt man mit Widerspruch.

7. Satz: (Brouwerscher Fixpunktsatz)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Jede stetige Abbildung $f: B^n \to B^n$ hat einen Fixpunkt, d.h. es existiert $x \in B^n$ mit $f(x) = x$

Beweisidee:

Den Satz zeigt man mit Widerspruch zu Borsuk – Ulam 4).

Literatur:

[1] J. Matousek. Using the Borsuk – Ulam Theorem, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, Universitext, Springer, 2003.