Seminar zur Ergodentheorie/messbaren Gruppentheorie

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de) August 2012

Gegenstand der Ergodentheorie sind maßerhaltende Operationen von Gruppen auf Wahrscheinlichkeitsräumen. Faszinierenderweise hat diese Theorie vielfältige Anwendungen in sehr unterschiedlichen Zweigen der Mathematik. Zum Beispiel lassen sich mit Hilfe der Ergodentheorie folgende Fragen beantworten:

– Gibt es eine Zweierpotenz, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffernfolge

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\dots2012$$

beginnt?

– Wieviele hyperbolische Strukturen kann eine topologische Mannigfaltigkeit besitzen?

– Mit welchen Frequenzen treten gegebene endliche Konfigurationen in Penrose-Täfelungen der euklidischen Ebene auf?

In diesem Seminar werden wir uns mit verschiedenen Aspekten der Ergodentheorie beschäftigen. Je nach Vorkenntnissen und Interessen der Teilnehmer werden wir folgende Themen behandeln:

– Anwendungen der Ergodentheorie in der Zahlentheorie.

– Anwendungen der Ergodentheorie in der hyperbolischen Geometrie (Flüsse, Starrheit)

– Messbare Gruppentheorie, Orbitäquivalenz und amenable Gruppen.

Die genauen Themen des Seminars werden auf die Vorkenntnisse der Teilnehmer abgestimmt.

Themen

Als Grundlage für das Seminar werden wir im wesentlichen das Buch *Ergodic Theory with a view towards Number Theory* [3] von M. Einsiedler und T. Ward verwenden; als Vorbereitung für das Seminar sollten Sie sich einen groben Überblick über die Inhalte der Anhänge

– Measure Theory

– Functional Analysis

– Topological Groups

dieses Buches verschaffen. Da es sich um ein Blockseminar handelt, und daher zwischen den Vorträgen nicht viel Zeit zum nach- und vorbereiten bleibt, empfiehlt es sich auch, im Voraus bereits die Literatur zu den anderen Vorträgen etwas anzusehen. Entsprechend den Wünschen und Vorkenntnissen der Teilnehmer werden die Schwerpunkte des Seminars auf den Anwendungen in der hyperbolischen Geometrie und auf der messbaren Gruppentheorie liegen.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

Allgemeine Grundlagen der Ergodentheorie

Vortrag 1 (Grundbegriffe der Ergodentheorie)**.** Eigenschaften von Rotationen des Einheitskreises (und Verbindung zur Zahlentheorie); maßerhaltende Transformationen; Bernoulli-Shift; Ergodizität; Rekurrenzsatz von Poincaré (evtl. Zusammenhang mit zahlentheoretischen Anwendungen).
Literatur: [3, Kapitel 1 (insbes. Übungsaufgabe 1.1.2), Kapitel 2.1–2.3]

Vortrag 2 (Klassische Ergodensätze)**.** Von-Neumann-Ergodensatz; maximaler Ergodensatz; Birkhoffscher Ergodensatz; Anwendung: Satz von Borel über Dezimalzahlen.
Literatur: [3, Kapitel 2.4–2.6, Beispiel 1.2]

Vortrag 3 (Lokalkompakte Gruppen)**.** Grundlagen über lokalkompakte Gruppen; Beispiele; Haarmaß; Formulierung von ergodentheoretischen Begriffen für Gruppenoperationen.
Literatur: [3, Kapitel 8.1, 8.3, 9.3]

Ergodentheorie in der hyperbolischen Geometrie

Vortrag 4 (Hyperbolische Geometrie)**.** Die hyperbolische Ebene (wenn möglich, mehrere Modelle); die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene; Geodäten in der hyperbolischen Ebene; Ausblick auf die höherdimensionalen hyperbolischen Räume und ihre Geometrie.
Literatur: [3, S. 277–285] [1] [7] (Bitte beachten Sie, dass nicht alle Teilnehmer Differentialgeometrie gehört haben. Achten Sie daher darauf, auch elementare/konkrete Beschreibungen zu geben.)

Vortrag 5 (Der geodätische Fluss)**.** Definition und anschauliche Beschreibung des geodätischen Flusses; Definition und anschauliche Beschreibung des Horozykelflusses; die Metrik auf dem Sphärenbündel; Dynamik der Quotienten.
Literatur: [3, Kapitel 9.1, 9.4]

Vortrag 6 (Ergodizität des geodätischen Flusses und Mostow-Starrheit)**.** Ergodizität des geodätischen Flusses (mit Beweis); Ausblick: Formulierung von Mostow-Starrheit; Rolle der Ergodizität des geodätischen Flusses im (Original-)-Beweis von Mostow-Starrheit.
Literatur: [3, Kapitel 9.5] [8, Kapitel 2] (Vorkenntnisse in algebraischer/geometrischer Topologie sind hilfreich.)

Messbare Gruppentheorie

Vortrag 7 (Amenable Gruppen)**.** Definition und Eigenschaften lokalkompakter amenabler Gruppen; Beispiele; Ergodensätze für amenable Gruppen.
Literatur: [3, Kapitel 8.4–8.6]

Vortrag 8 (Orbitäquivalenz und Maßäquivalenz)**.** Vorstellung der Begriffe Maßäquivalenz und Orbitäquivalenz; Vergleich mit Quasi-Isometrie; grundlegende Beispiele; Überblick über Resultate (insbesondere: wann liegt Starrheit vor?) und Techniken der messbaren Gruppentheorie.
Literatur: [4, Artikel 10, Abschnitte 1–4] (Für diesen Vortrag empfehlen sich Kenntnisse in geometrischer Gruppentheorie und algebraischer Topologie.)

Vortrag 9 (Der Satz von Dye)**.** Formulierung des Satzes von Ornstein und Weiss; Formulierung des Satzes von Dye; Zusammenhang zwischen Gruppenoperationen, Orbitäquivalenz und Äquivalenzrelationen; Beweisskizze des Satzes von Dye.
Literatur: [5, Kapitel 1,6,7] (Vorkenntnisse in geometrischer Gruppentheorie sind hilfreich.)

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche (wenn möglich zwei Wochen) vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen (wenn möglich drei Wochen) vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

– Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

http://books.google.com
http://www.ams.org/mathscinet
http://www.springerlink.com

– Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.

– Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.

– Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [6]; dafür werden auch LaTeX-Vorlagen zur Verfügung gestellt: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ergsem_ws1213/

– Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

– Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.

– Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.

– Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.

– Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

– Sprechen Sie laut und deutlich.

– Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

– Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?

– Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

[1] R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Universitext, Springer, 1992.

[2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.

[3] M. Einsiedler, T. Ward. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Band 259, Springer, 2011.

[4] B. Farb, D. Fisher (Hrsg.). *Geometry, Rigidity, and Group Actions*, Chicago Lectures in Mathematics Series, The University of Chicago Press, 2011.

[5] A.S. Kechris, B.D. Miller. *Topics in Orbit Equivalence*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Band 1852, 2004.

[6] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

Eines der Standardwerke zur Benutzung von LaTeX; weitere Unterstützung finden Sie unter http://www.ctan.org/starter.html

[7] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, Band 149, Springer, 1994.

[8] R.J. Spatzier. Harmonic analysis in rigidity theory, In: *Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993)*, S. 153–205, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Band 205, Cambridge University Press, 1995.

[9] T. Tantau. *The* TikZ *and* PGF *Packages*, http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf

Dokumentation des TikZ-Pakets für LaTeX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in LaTeX zu erstellen.