Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold — Blatt 0, 16. Oktober 2023

Aufgabe 1 (tautologisch?!; 4 Punkte)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. $A \Longrightarrow \bigl(B \land (\neg B)\bigr)$
2. $\bigl((\neg A) \lor B\bigr) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B)$

Aufgabe 2 (natürliche Wahrheiten?!; 4 Punkte)**.** Übersetzen Sie die folgende quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen in einen entsprechenden deutschen Satz (bzw. umgekehrt). Handelt es sich dabei jeweils um eine wahre quantorenlogische Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\forall_x \quad \exists_y \quad \exists_z \quad x = z + y + 1 + y + z$
2. Es gibt eine natürliche Zahl z mit folgender Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen x ist $x \cdot z + x = x$.

Hints. Wir werden die natürlichen Zahlen später präzise einführen. Sie können in dieser Aufgabe Ihr Schulwissen verwenden.

Aufgabe 3 (der Dreiecksoperator; 4 Punkte)**.** Wir ergänzen die aussagenlogische Syntax um folgendes:

- Sind A und B aussagenlogische Formeln, so ist auch $(A \triangle B)$ eine aussagenlogische Formel.

Wir ergänzen die klassische Semantik der Aussagenlogik um die folgende Interpretation:

A	B	$A \triangle B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben in dieser erweiterten Aussagenlogik:

1. Zeigen Sie, dass $(A \triangle B) \Longrightarrow (A \lor B)$ eine aussagenlogische Tautologie ist.
2. Wie könnte man „$\triangle$“ umgangssprachlich sinnvoll übersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hints. Es handelt sich bei dem Symbol „$\triangle$“ *nicht* um die Standardnotation für diese logische Operation!

Keine Abgabe/Korrektur!

Hinweise zu Aufgabe 1

- Wie ist „aussagenlogische Tautologie“ definiert?
- Was muss man also überprüfen?

Hinweise zu Aufgabe 2

- Wie ist die Semantik von $\forall$ und $\exists$ definiert?
- Denken Sie auch an kleine natürliche Zahlen!
- Die natürlichen Zahlen enthalten 0.

Hinweise zu Aufgabe 3

- Wie ist „aussagenlogische Tautologie“ definiert?
- Vergleichen Sie die Wahrheitstafel für „$\triangle$“ mit umgangssprachlichen Satzkonstruktionen.

Lösung zu Aufgabe 1

Voraussetzung: Seien A und B aussagenlogische Variablen.

- Teilaufgabe 1:

  Behauptung. Es ist $A \Longrightarrow \big(B \wedge (\neg B)\big)$ *keine* aussagenlogische Tautologie.

  Beweis. Es genügt, eine Belegung für A und B anzugeben, für die angegebene Formel nicht den Wert w erhält.

  Wir belegen A mit w und B mit w. Dann erhalten wir Schritt für Schritt:

  – Die Formel $B \wedge (\neg B)$ erhält den Wert f.
  – Die Formel $A \longrightarrow \big(B \wedge (\neg B)\big)$ erhält somit den Wert f.

  Also ist $A \longrightarrow \big(B \wedge (\neg B)\big)$ keine aussagenlogische Tautologie. $\square$

- Teilaufgabe 2:

  Behauptung. Es ist $\big((\neg A) \vee B\big) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

  Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$\big((\neg A) \vee B\big) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

  Also ist $\big((\neg A) \vee B\big) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B)$ eine aussagenlogische Tautologie. $\square$

Hints. Lösungen sollten im Normalfall in

- Voraussetzung
- Behauptung
- Beweis

gegliedert werden. Durch diese Struktur wird die Lösung übersichtlich und viele Fehler bzw. Lücken werden vermieden.

Den allgemeinen Beweisbegriff führen wir in der zweiten Vorlesung ein. Auf diesem Übungsblatt treten nur „Begründungen" auf, die direkt auf den Definitionen beruhen. Es ist aber vielleicht nicht verkehrt, sich gleich das Wort „Beweis" statt „Begründung" anzugewöhnen.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.1

Ja, es ist eine Tautologie, denn, wenn man A mit f und B mit w belegt, ergibt sich für die gesamte Formel der Wert w.

Korrektur. Diese „Lösung" ist nicht korrekt: Die behauptete Aussage stimmt nicht (s. obiger Beweis). Die Begründung ist nicht schlüssig, da für eine Tautologie *alle* möglichen Bewertungen überprüft werden müssen.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.1

Nein, es ist keine Tautologie. Dies ist offensichtlich.

Korrektur. „Offensichtlich" ist ein gefährliches Wort, das zu vielen Fehlern und Missverständnissen führt. Lösungen zu Übungsaufgaben müssen so formuliert sein, dass dem Leser klar ist, dass Sie wirklich verstanden haben, wie Ihre Lösung funktioniert. Dies ist bei der obigen „Lösung" nicht gegeben.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.2

Behauptung. Es ist $\big((\neg A) \vee B\big) \iff (A \implies B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Ich habe ein Programm geschrieben, das alle möglichen Belegungen ausprobiert. Es ergab sich immer der Wert w. Also handelt es sich um eine aussagenlogische Tautologie. □

Korrektur. Man könnte diese Aufgabe tatsächlich mit einem entsprechenden Programm lösen. Dann muss aber unbedingt der Quellcode mit abgegeben werden und es muss nachvollziehbar (!) dokumentiert werden, warum das Programm korrekt ist und die Aufgabe löst (das ist oft schwieriger als man denkt ...).

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.2

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \implies B$	$\big((\neg A) \vee B\big) \iff (A \implies B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Korrektur. Bei dieser „Lösung“ ist die Tabelle zwar korrekt, es ist aber nicht klar, was die Antwort auf Frage aus der Aufgabe ist und was diese Tabelle damit zu tun hat.

Falls man die Antwort auf die Fragen nicht sofort „sieht“, kann es natürlich sinnvoll sein, zunächst diese Tabelle vollständig auszufüllen und dann anhand dieser Tabelle die Frage zu beantworten. Die abgegebene Lösung muss aber auf jeden Fall die Antwort enthalten und nachvollziehbar formuliert sein.

Lösung zu Aufgabe 2

- Teilaufgabe 1:

  Voraussetzung. Sei A die quantorenlogische Formel

  $$\forall_x \quad \exists_y \quad \exists_z \quad x = z + y + 1 + y + z$$

  in der Sprache der natürlichen Zahlen.

  Umgangssprachliche Formulierung. Indem wir

  – $\forall_x$ mit „für alle natürlichen Zahlen x“,
  – $\exists_x$ mit „es existiert eine natürliche Zahl x“

  übersetzen, entspricht A dem folgenden deutschen Satz:

  Für alle natürlichen Zahlen x gibt es natürliche Zahlen y und z mit $x = z + y + 1 + y + z$.

  Behauptung. Die quantorenlogische Aussage A ist *nicht* wahr.

  Beweis. Es genügt, eine natürliche Zahl x zu finden, für die die Aussage $\exists_y \quad \exists_z \quad x = z + y + 1 + y + z$ in der Sprache der natürlichen Zahlen *nicht* wahr ist.

  Wir betrachten die natürliche Zahl $x = 0$. Für alle natürlichen Zahlen y und z ist

  $$z + y + 1 + y + z \geq 1 > 0 = x.$$

  Insbesondere ist $z + y + 1 + y + z \neq x$. Also gilt *nicht*, dass es natürlichen Zahlen y, z mit $x = z + y + 1 + y + z$ gibt.

  Somit ist $\exists_y \quad \exists_z \quad x = z + y + 1 + y + z$ für $x = 0$ *nicht* wahr. Also ist A *nicht* wahr. □

- Teilaufgabe 2:

  Voraussetzung. Wir betrachten den folgenden deutschen Satz: Es gibt eine natürliche Zahl z mit folgender Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen x ist $x \cdot z + x = x$.

  Formulierung als quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen. Indem wir

  – „für alle natürlichen Zahlen x“ mit $\forall_x$,
  – „es existiert eine natürliche Zahl x“ mit $\exists_x$

übersetzen, entspricht der obige Satz der folgenden quantorenlogischen Formel B:

$$\exists_z \quad \forall_x \quad x \cdot z + x = x.$$

Behauptung. Die quantorenlogische Aussage B ist wahr.

Beweis. Es genügt, eine natürliche Zahl z zu finden, für die die quantorenlogische Aussage $\forall_x \quad x \cdot z + x = x$ in der Sprache der natürlichen Zahlen wahr ist.

Wir betrachten $z := 0$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen x, dass

$$x \cdot z + x = x \cdot 0 + x = 0 + x = x.$$

Also gilt $\forall_x \quad x \cdot z + x = x$ für $z = 0$. Somit ist B wahr. □

Lösung zu Aufgabe 3

- Teilaufgabe 1:

  Voraussetzung. Seien A und B aussagenlogische Variablen.

  Behauptung. Es ist $(A \triangle B) \Longrightarrow (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

  Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$A \triangle B$	$A \vee B$	$(A \triangle B) \Longrightarrow (A \vee B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	f	f	w

  Also ist $(A \triangle B) \Longrightarrow (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie. □

- Teilaufgabe 2:

  Behauptung. Umgangssprachlich entspricht „① △ ②“ der Formulierung „entweder ① oder ②“.

  Beweis. Das umgangssprachliche „entweder … oder … “ wird durch die folgende Wahrheitstafel modelliert:

A	B	entweder A oder B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

  Die Werteverteilung dieser Wahrheitstabelle stimmt mit der für „△“ überein. □

  Hints. In der Informatik wird diese Operation normalerweise als „XOR“ (exclusive or) bezeichnet.