Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 1, 16. Oktober 2023

Fingerübung A (aussagenlogische Formeln)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden Symbolketten sind aussagenlogische Formeln?

$$\bigl(A \land (A \land A)\bigr), \quad \bigl(B \Longrightarrow (\lor A)\bigr), \quad (A \land / \lor B)$$

Fingerübung B (klassische Semantik)**.** Welche Werte erhält man in der klassischen Semantik der Aussagenlogik, wenn man in

$$\bigl(A \land (B \lor A)\bigr) \Longrightarrow \bigl((\neg A) \lor B\bigr)$$

die Variable A mit w und die Variable B mit f belegt? Skizzieren Sie auch den Syntaxbaum und illustrieren Sie daran Ihre Berechnung!

Fingerübung C (StVO)**.** Formalisieren Sie die folgende Aussage im Stile der Quantorenlogik und negieren Sie die Aussage; versuchen Sie dabei, die Negationen auch wieder sprachlich sauber zu formulieren.

> Verkehrshindernisse sind, wenn nötig, mit eigener Lichtquelle zu beleuchten oder durch andere zugelassene lichttechnische Einrichtungen kenntlich zu machen.

Hints. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Normalerweise werden die Fingerübungen in der jeweiligen Übungsgruppe besprochen. Da die Übungsgruppen erst ab der zweiten Vorlesungswoche stattfinden, können Sie diese Woche alternativ das Frageforum in GRIPS verwenden, wenn Sie Fragen haben. Außerdem helfen evtl. die Hinweise zu Blatt 0.

Hinweis. Bitte lesen Sie vor dem Aufschreiben/vor der Abgabe auch die Lösungshinweise zu Blatt 0 und die allgemeinen Hinweise zum Bearbeiten von Übungsaufgaben!

Aufgabe 1 (tautologisch?!; 4 Punkte)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. $\bigl(A \Longrightarrow (B \land (\neg B))\bigr) \Longrightarrow (\neg A)$
2. $(A \land B) \Longrightarrow \bigl((\neg A) \land (\neg B)\bigr)$

Aufgabe 2 (natürliche Wahrheiten?!; 4 Punkte)**.** Übersetzen Sie die folgende quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen in einen entsprechenden deutschen Satz (bzw. umgekehrt). Handelt es sich dabei jeweils um eine wahre quantorenlogische Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\forall_x \quad \bigl((\exists_y \quad x = y + 1) \Longrightarrow (\exists_z \quad x = z + 1)\bigr)$
2. Für jede natürliche Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y mit $x = y + 1$.

Hints. Wir werden die natürlichen Zahlen später präzise einführen. Sie können in dieser Aufgabe Ihr Schulwissen verwenden.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (der Sternoperator; 4 Punkte)**.** Wir ergänzen die aussagenlogische Syntax um folgendes:

- Sind A und B aussagenlogische Formeln, so ist auch $(A * B)$ eine aussagenlogische Formel.

Wir ergänzen die klassische Semantik der Aussagenlogik um die folgende Interpretation:

A	B	$A * B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben in dieser erweiterten Aussagenlogik:

1. Zeigen Sie, dass $(A * B) \Longleftrightarrow \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$ eine aussagenlogische Tautologie ist.

2. Wie könnte man „$*$" umgangssprachlich sinnvoll übersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Blorxlogik; 4 Punkte)**.** Commander Blorx hat sich die untenstehende Logik mit dem Blorxoperator $\boxtimes$ ausgedacht. Erklären Sie, wie Commander Blorx die gewöhnlichen Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ (mit ihrer klassischen Semantik) durch $\boxtimes$ ausdrücken kann!

- *Syntax.*
  - Aussagenlogische Variablen sind Blorxformeln.
  - Sind A und B Blorxformeln, so auch $(A \boxtimes B)$; lies: „A blorx B".
  - Keine weiteren Symbolketten sind Blorxformeln.
- *Semantik.*
  - Variablen können mit den Wahrheitswerten w bzw. f belegt werden.
  - Belegen wir alle in einer aussagenlogischen Formel vorkommenden Variablen mit w bzw. f (wobei verschiedene Auftreten derselben Variablen in einer Formel denselben Wert erhalten müssen), so erhalten wir einen Wahrheitswert, indem wir Schritt für Schritt die folgende semantische Regel anwenden:

A	B	$A \boxtimes B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w