Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 2, 23. Oktober 2023

Hinweis. Zur Erinnerung: Die Fingerübungen werden nicht abgegeben/korrigiert, sondern in den Übungsgruppen bearbeitet.

Fingerübung A (Assoziativität?). Seien A, B, C aussagenlogische Variablen. Handelt es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um aussagenlogische Tautologien?

$$\bigl(A \land (B \land C)\bigr) \iff \bigl((A \land B) \land C\bigr)$$
$$\bigl(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\bigr) \iff \bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr)$$

Fingerübung B (Voraussetzung/Behauptung). Zerlegen Sie die folgenden Textblöcke in Voraussetzungen und Behauptungen. Welche grundlegende Beweisstruktur könnte man jeweils erwarten?

- Sei K ein Körper. Dann gilt für alle $x \in K$, dass $x \cdot 0 = 0$.
- Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_i)_{i\in I}$ und sei W ein K-Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Abbildung $f\colon I \longrightarrow W$ genau eine K-lineare Abbildung $F\colon V \longrightarrow W$ mit
$$\forall_{i\in I} \quad F(v_i) = f(i).$$

Hinweis. Sie müssen diese Textblöcke nicht verstehen; es geht um die Struktur.

Fingerübung C (mehr Tautologien?). Sei T eine Sprache/Theorie und sei A eine quantorenlogische Aussage über T, in der die Variable x nicht gebunden vorkommt. Welche der folgenden quantorenlogischen Aussagen sind aussagenlogische Tautologien über T ? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\bigl(\forall_x \quad A(x)\bigr) \Longrightarrow \bigl(\exists_x \quad A(x)\bigr)$
2. $\bigl(\exists_x \quad A(x)\bigr) \lor \bigl(\neg\bigl(\exists_x \quad A(x)\bigr)\bigr)$

Aufgabe 1 (noch mehr Tautologien?; 4 Punkte). Sei T eine Sprache/Theorie und seien A und B quantorenlogische Aussagen über T, in denen die Variable x nicht gebunden vorkommt. Welche der folgenden quantorenlogischen Aussagen sind aussagenlogische Tautologien über T ? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\bigl((\forall_x \quad A(x)) \land (\forall_x \quad B(x))\bigr) \Longrightarrow \bigl((\forall_x \quad B(x)) \land (\forall_x \quad A(x))\bigr)$
2. $\bigl((\forall_x \quad A(x)) \land (\exists_x \quad B(x))\bigr) \Longrightarrow (\exists_x \quad B(x))$

Aufgabe 2 (Implikationsumkehr; 4 Punkte). Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Wenn A und B quantorenlogische Aussagen sind und $A \Longrightarrow B$ gilt, so gilt auch $B \Longrightarrow A$

Beweis. Seien A und B quantorenlogische Aussagen und es gelte $A \Longrightarrow B$. *Angenommen*, es gilt nicht $B \Longrightarrow A$, d.h. es gilt $B \Longrightarrow \neg A$. Wegen der Voraussetzung $A \Longrightarrow B$ erhalten wir daraus aber auch $A \Longrightarrow \neg A$, was nicht sein kann. Also muss die Annahme falsch gewesen sein, und damit gilt $B \Longrightarrow A$. $\square$

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Wer war's?; 4 Punkte)**.** Professor Pirkheimer wird tot in der Bibliothek seines Anwesens aufgefunden.

① Als Täter kommen nur der Gärtner, der Frisör oder Blorx infrage.

② Nur der Gärtner und der Frisör haben eine Schere und es gibt keine Tasse, die nicht im Schrank ist.

③ Wenn die Frisur von Professor Pirkheimer wohlgeordnet ist, hatte der Frisör keine Zeit für den Mord oder der Frisör hat Blorx das Frisieren beigebracht.

④ Wenn Blorx den Professor erlegt hat, sind nicht mehr alle Tassen im Schrank.

⑤ Wenn alle Tassen im Schrank sind, ist auch Professor Pirkheimers Frisur wohlgeordnet.

⑥ Professor Pirkheimer wurde mit einer Schere erdolcht.

⑦ Blorx kann nicht Frisieren.

Wer war's? Formulieren Sie eine geeignete Behauptung und beweisen Sie diese logisch aus den obigen Axiomen!

Bonusaufgabe (Wer war's, reloaded; 4 Punkte)**.** Formalisieren Sie die Axiome und Ihren Beweis von Aufgabe 3 in Lean 4.
Hinweis. Geben Sie (auch) die Quelldatei ab (als Textdatei). Stellen Sie bitte sicher, dass die Datei fehlerfrei interpretiert/kompiliert werden kann und dokumentieren Sie Ihren Quellcode sinnvoll.