

Grundlagen der Mathematik^{FIDS}: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 3, 30. Oktober 2023

Fingerübung A (Mengenoperationen). Sei $A := \{0, 2, 4\}$, $B := \{0, 3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$. Skizzieren Sie diese Mengen!

Fingerübung B (Abbildungen). Die Abbildung $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ sei gegeben durch $0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 0$. Ist $f \circ f \circ f$ injektiv? Ist $f \circ f \circ f$ surjektiv? Mussten Sie dafür $f \circ f \circ f$ wirklich ausrechnen?

Fingerübung C (surjektiv, injektiv). Seien X, Y Mengen und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Welche der folgenden Formeln sind äquivalent zur Injektivität bzw. Surjektivität von f ? Was bedeuten die anderen Formeln?

1. $\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$
 2. $\exists x \in X \forall y \in Y f(x) = y$
 3. $\forall x \in X \forall x' \in X ((f(x) = f(x')) \implies (x = x'))$
 4. $\forall x \in X \forall x' \in X ((f(x) \neq f(x')) \implies (x = x'))$
-

Aufgabe 1 (Mengenoperationen; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel!

1. Für alle Mengen A und B gilt $(A \cup B) \cup A = A \cup B$.
2. Für alle Mengen A und B gilt $(A \cup B) \setminus B = A$.

Hinweis. Wie beweist man eine \forall -Aussage? Wie widerlegt man eine \forall -Aussage durch ein (konkretes!) Gegenbeispiel?

Aufgabe 2 (Kompositionen; 4 Punkte).

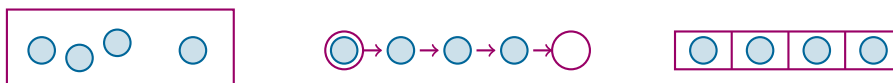
1. Sei $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ gegeben durch $0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 3$. Geben Sie eine Abbildung $g: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ an, die $g \circ f = \text{id}_{\{0,1,2\}}$ erfüllt (und begründen Sie Ihre Antwort).
2. Zeigen Sie: Sind A, B Mengen und sind $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ Abbildungen mit $g \circ f = \text{id}_A$, so ist f injektiv.

Aufgabe 3 (Potenzmengen sind „groß“; 4 Punkte). Sei X eine Menge und sei $f: X \rightarrow P(X)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f *nicht* surjektiv ist.

Hinweis. Verwenden Sie *Reductio ad absurdum*. Liegt $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ im Bild von f ?! Argumentieren Sie wie im Russellschen Paradoxon ...

Bonusaufgabe (sets, lists, arrays; 4 Punkte). Wählen Sie eine Programmiersprache, in der es Datentypen/-strukturen für Mengen, Listen und Arrays gibt. Vergleichen Sie diese! Achten Sie insbesondere darauf, welche Operationen zur Verfügung gestellt werden (Konstruktoren, Eliminatoren, Kombinatoren) und, wenn möglich, welche Laufzeiten bzw. welcher Speicherplatzverbrauch auftreten.

Hinweis. Belegen Sie Ihre Aussagen durch geeignete Quellen!



Abgabe bis 6. November 2023, 10:00, via GRIPS