Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold — Blatt 4, 6. November 2023

Fingerübung A (Summen). Bestimmen Sie $\sum_{j=1}^{2023}(2\cdot j)$ und $\sum_{j=1}^{2023}(2\cdot j+1)$ jeweils sowohl durch Rückführung auf bekannte Ergebnisse als auch per vollständiger Induktion.

Fingerübung B (Rekursion). Wir definieren $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &:= 42 \\ f(n+1) &:= 2023 \cdot f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Geben Sie eine geschlossene Darstellung für f an und beweisen Sie diese per Induktion. Was passiert, wenn man den Startwert von 42 auf 0 ändert?

Fingerübung C (Wiederholung). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Seien A, B aussagenlogische Variablen. Ist $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((\neg A) \lor B)$ eine aussagenlogische Tautologie?
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $\{0,2,4,6\} \longrightarrow \{0,3\}$, die nicht surjektiv ist. Wieviele Beispiele können Sie finden?

Aufgabe 1 (Quadratsummen; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel!

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $6 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = n^2 \cdot (n^2+1)$.

Aufgabe 2 (geometrische Summen; 4 Punkte). Zeigen Sie per vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}.$$

Aufgabe 3 (Blorxscher Gleichheitssatz; 4 Punkte). Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

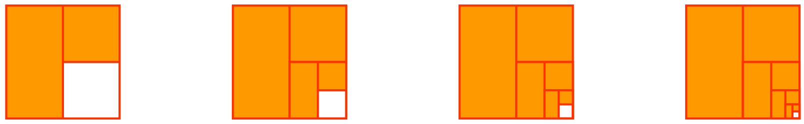
Behauptung. Alle Außerirdischen haben dieselbe Anzahl an Füßen.

Beweis. Wir zeigen per vollständiger Induktion: Ist $n \in \mathbb{N}$, so besitzen in jeder Menge von genau n Außerirdischen alle dieselbe Anzahl an Füßen.

- *Induktionsanfang.* Ist $n = 0$ oder $n = 1$, so ist die Behauptung wahr.
- *Induktionsvoraussetzung.* Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung sei für n Außerirdische bereits gezeigt.
- *Induktionsschritt.* Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $n+1$ Außerirdische gilt: Wir numerieren die Außerirdischen als $A_0, \dots, A_n$. Nach Induktionsvoraussetzung haben $A_0, \dots, A_{n-1}$ bzw. $A_1, \dots, A_n$ jeweils dieselbe Anzahl an Füßen. Durch Betrachtung von A_1 folgt, dass dann auch $A_0, \dots, A_n$ alle dieselbe Anzahl an Füßen haben müssen. $\square$

Bitte wenden

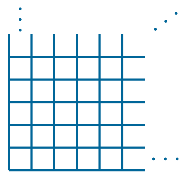
Bonusaufgabe (geometrische Summen, geometrisch; 4 Punkte)**.** Schreiben Sie ein LaTeX-Makro \geomsum mit einem Argument, so dass Bilder nach dem folgenden Schema erstellt werden:



\geomsum{1} \geomsum{2} \geomsum{3} \geomsum{4}

Dokumentieren Sie Ihre Lösung und erklären Sie zusätzlich, was diese Bilder mit Aufgabe 2 zu tun haben!
Hinweis. Sie können mit der Vorlage squares.tex beginnen.

Bonusaufgabe (Infinisudoku; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Man das nach rechts und oben unendliche Gitter



so mit natürlichen Zahlen füllen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede natürliche Zahl genau einmal auftritt.
Hinweis. Versuchen Sie zunächst, das Problem systematisch für Quadrate der Seitenlänge $1, 2, 4, \dots$ zu lösen und kombinieren Sie diese Lösungen induktiv.

Bonusaufgabe (Neunomanie; 4 Punkte)**.** Wir definieren $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &:= 9 \\ f(n+1) &:= 3 \cdot f(n)^4 + 4 \cdot f(n)^3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Dezimaldarstellung von $f(11)$ mehr als 2023 Neunen enthält.
Hinweis. Es gilt $2^{11} > 2023$. Mit wievielen Neunen endet $10^m - 1$?!

Bonusaufgabe (Kommutativität der Addition; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie wie folgt die Kommutativität der induktiv definierten Addition auf $\mathbb{N}$; Sie dürfen dabei die Assoziativität der Addition auf $\mathbb{N}$ verwenden.

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 + n = n$.
2. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 = 1 + n$.
3. Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m + n = n + m$.

Bonusaufgabe (Listen in Lean 4; 4 Punkte)**.** Listen (über einem gegebenen Basisdatentyp) sind in Lean 4 in Init/Prelude.lean wie folgt (induktiv!) definiert:

```
inductive List (α : Type u) where
/-- ‘[]‘ is the empty list. -/
| nil : List α
/-- If ‘a : α‘ and ‘l : List α‘, then ‘cons a l‘, or ‘a :: l‘,
    is the list whose first element is ‘a‘ and with ‘l‘
    as the rest of the list. -/
| cons (head : α) (tail : List α) : List α
```

Formulieren Sie (in Analogie zum Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen) in natürlicher Sprache ein Induktionsprinzip zum Beweis von Aussagen über Listen in Lean 4.

Abgabe bis 13. November 2023, 10:00, via GRIPS