

# Grundlagen der Mathematik<sup>FIDS</sup>: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 5, 13. November 2023

---

**Fingerübung A** (Graphenflora). Stellen Sie die folgenden ungerichteten Graphen „graphisch“ dar. Welche dieser Graphen sind Bäume? Zusammenhängend? Sind diese Graphen isomorph?

$$(\{1, \dots, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}), \quad (\{1, \dots, 4\}, \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\})$$

**Fingerübung B** (Graphen zählen). Wieviele ungerichtete Graphen gibt es, deren Knotenmenge  $\{1, \dots, 83\}$  ist?

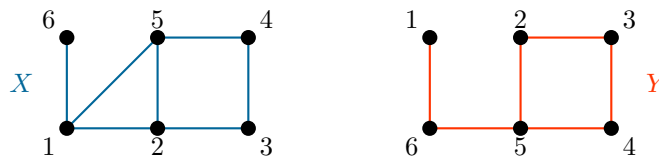
*Hinweis.* Sie können auch erstmal mit einer kleinen 83 experimentieren.

**Fingerübung C** (Wiederholung). Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\sum_{j=0}^n j, \quad \sum_{k=0}^{42} k, \quad \sum_{n=0}^{42} n, \quad \sum_{j=0}^{41} 42, \quad \sum_{j=1}^{41} 42, \quad \sum_{n=0}^{41} (n + 83)$$

---

**Aufgabe 1** (isomorphe Graphen? 4 Punkte). Wir betrachten die Graphen, die durch folgende Skizzen beschrieben werden:



Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils die formale Beschreibung dieser Graphen und begründen Sie Ihre Antwort!

1. Der Graph  $Y$  ist ein Baum.
2. Die Graphen  $X$  und  $Y$  sind isomorph.

**Aufgabe 2** (Blätter von Binärbäumen; 4 Punkte). Zeigen Sie per vollständiger Induktion: Ist  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $(T, v)$  ein binärer Wurzelbaum der Höhe  $n$ , so besitzt  $T$  höchstens  $2^n$  Blätter.

**Aufgabe 3** (doppelt gezählt hält besser; 4 Punkte).

1. Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher Graph. Zeigen Sie:

$$\sum_{v \in V} \deg_X(v) = 2 \cdot \#E.$$

*Hinweis.* Hierbei ist  $\sum_{v \in V}$  analog zu  $\sum_{j=1}^n$  definiert; wenn Sie möchten, können Sie auch annehmen, dass  $V = \{1, \dots, n\}$  ist. Gehen Sie induktiv vor oder betrachten Sie die Menge  $\{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$ .

2. Folgern Sie: Die Anzahl der Studenten der Universität Regensburg, die mit einer ungerade Anzahl anderer Studenten der UR eine gemeinsame Vorlesung besuchen, ist gerade.

*Hinweis.* Sie werden Eigenschaften von geraden/ungeraden natürlichen Zahlen verwenden; Sie müssen diese nicht beweisen, aber Sie sollten klar formulieren, welche Eigenschaften Sie verwenden.

*Bitte wenden*

**Bonusaufgabe** (Blorxscher Geheimdienst; 4 Punkte). Der Blorxsche Geheimdienst besteht aus mindestens sieben (mysteriös!) Agenten.

1. Zeigen Sie, dass folgendes gilt: Es gibt drei Agenten im Blorxschen Geheimdienst, die sich alle paarweise kennen, oder es gibt drei Agenten im Blorxschen Geheimdienst, die sich alle paarweise nicht kennen.

*Hinweis.* Modellieren Sie die Situation durch einen geeigneten Graphen und vergessen Sie nicht, dass unter je drei Schuhen mindestens zwei linke oder mindestens zwei rechte sind. Beachten Sie außerdem, dass „oder“ nicht dasselbe ist wie „entweder ... oder ...“ !

2. Was passiert, wenn man „sieben“ durch „fünf“ ersetzt? Begründen Sie Ihre Antwort!