Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 6, 20. November 2023

Fingerübung A (eine studentische Relation). Wir betrachten die Relation „ist im selben Studiengang eingeschrieben wie“ auf der Menge aller Studenten der UR. Ist diese Relation reflexiv? Irreflexiv? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitiv? Eine Äquivalenzrelation? Eine partielle Ordnung? Eine totale Ordnung? Eine Abbildung?

Fingerübung B (Äquivalenzklassen). Wir betrachten auf $\{0, \dots, 10\}$ die Relation $\{(x, y) \mid x - y \text{ ist gerade}\}$.

1. Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
2. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen dieser Relation.

Fingerübung C (Wiederholung).

1. Geben Sie ein Beispiel für einen zusammenhängenden Graphen, der genau fünf Knoten besitzt, wovon genau zwei den Grad 3 besitzen.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen binären Wurzelbaum mit genau 42 Blättern. Welche Höhe hat Ihr Beispiel?

Aufgabe 1 (Relationship; 4 Punkte). Wir betrachten die Relation „ist verheiratet mit“ auf der Menge aller Bürger in Deutschland. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Diese Relation ist symmetrisch.
2. Diese Relation ist transitiv.

Aufgabe 2 (Teiler von 42; 4 Punkte). Sei $Z \subset \{1, \dots, 42\}$ die Menge der Teiler von 42. Wir betrachten die partielle Ordnung $T := \bigl\{(x, y) \bigm| x, y \in Z,\ x \text{ teilt } y\bigr\}$ auf Z.

1. Skizzieren Sie den Graphen $X := (Z, T)$ in sinnvoller Weise.
2. Ist die partielle Ordnung T total?
3. Besitzt die partielle Ordnung T ein maximales Element?
4. Gibt es im Graphen X einen gerichteten Weg von 3 nach 14 ?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 3 (Modulo-Rechnung; 4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\sim_n$ die Relation $\bigl\{(x, y) \bigm| n \text{ teilt } x - y\bigr\}$ auf $\mathbb{Z}$. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}/n := \mathbb{Z}/{\sim_n}$ die in der Vorlesung definierte Addition und Multiplikation.

1. Zeigen Sie, dass $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}/42$ mit $[5] \cdot x = [3]$ (in $\mathbb{Z}/42$) ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Wurzel aus 42; 4 Punkte). Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Z}/2023$ mit $x^2 = [42]$ gibt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Schreiben Sie ein Programm, das eine solche Lösung x findet und dokumentieren/erklären Sie Ihr Programm.

2. Finden Sie einen Beweis, dass x eine Lösung ist, den man von Hand (ohne „komplizierte“ Rechnung) nachvollziehen kann.

   Hinweis. Dies wird erfordern, dass Sie andere Dinge tun als in Ihrem Programm!

Abgabe bis 27. November 2023, 10:00, via GRIPS