Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold   Blatt 7, 27. November 2023

Fingerübung A (Wurzel aus 5, Schritt 1). Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$ nicht-leer und beschränkt ist (ohne „$\sqrt{5}$“ zu verwenden!).

Fingerübung B (komplexe Zahlen).

1. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von
$$\frac{-4 + 2 \cdot i}{9 + 6 \cdot i}.$$
2. Sei $\zeta := 1/2 \cdot (\sqrt{3} \cdot i - 1)$. Zeigen Sie, dass $\zeta^2 \neq 1$ und $\zeta^3 = 1$ ist. Skizzieren Sie die Elemente in der komplexen Ebene!

Fingerübung C (Bits). Welchen logischen Operationen entsprechen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}/2$ unter den folgenden Übersetzungen?

- 0 entspricht w; 1 entspricht f.
- 0 entspricht f; 1 entspricht w.

Fingerübung D (Zusammenfassung). Welche Themen wurden in der Vorlesung behandelt? Was sind die wichtigen Definitionen, Beispiele, Sätze, Beweistechniken? Was ist Ihr Lieblingsthema? Was ist Ihre Nemesis?

Aufgabe 1 (Ungleichungen; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad y \leq x + y$
2. $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad x \cdot y \leq x \cdot (x + y)$

Aufgabe 2 (ganz komplex; 4 Punkte). Bestimmen Sie reelle Zahlen x und y mit der Eigenschaft, dass
$$(x + y \cdot i) \cdot \frac{2023 - i}{42 + 11 \cdot i}$$
eine ganze Zahl ungleich 0 ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Wurzel aus 5, Schritt 2; 4 Punkte). Sei $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$. Nach Fingerübung A existiert aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ die reelle Zahl $z := \sup A$. Die untenstehenden Aussagen zeigen kombiniert, dass $z^2 = 5$ ist. Lösen Sie einen der beiden Aufgabenteile (ohne „$\sqrt{5}$“ zu verwenden!):

1. Zeigen Sie, dass $z^2 \not< 5$ ist.

   Hinweis. Betrachten Sie $(z + \varepsilon)^2$, wobei $\varepsilon = (5 - z^2)/20$ ist und erinnern Sie sich an die Definition des Supremums.

2. Zeigen Sie, dass $z^2 \not> 5$ ist.

   Hinweis. Betrachten Sie $(z - \varepsilon)^2$, wobei $\varepsilon = (z^2 - 5)/2 \cdot z$ ist und erinnern Sie sich an die Definition des Supremums.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Fibonaccizahlen, reloaded; 4 Punkte). Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl die Funktionen $F, G\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F(0) &:= 1 \\ F(1) &:= 1 \\ F(n+2) &:= F(n) + F(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

bzw. (wobei $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\overline{\varphi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

$$G\colon n \longmapsto \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Liefern $F(32)$ und $G(32)$ dasselbe Ergebnis? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? Dokumentieren und erklären Sie Ihr Programm! Welche Datentypen verwenden Sie für die auftretenden Zahlen?

Die folgenden Bonusaufgaben bieten die Gelegenheit, einen etwaigen Punkterückstand aufzuholen und die Themen der Vorlesung nochmal zu üben.

Bonusaufgabe (tauto-logisch; 4 Punkte). Seien A, B, C aussagenlogische Variablen. Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. $\bigl((A \land B) \lor C\bigr) \Longrightarrow \bigl((B \land (\neg C)) \lor A\bigr)$
2. $\bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr) \lor (\neg A) \lor (\neg B) \lor (\neg C)$

Bonusaufgabe ($*$-jektiv; 4 Punkte). Ist die folgende Abbildung injektiv? Surjektiv? Bijektiv? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x^2 + 42 \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (harmonische Summen; 4 Punkte). Zeigen Sie per Induktion, dass folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} > \frac{n}{2}.$$

Hinweis. Es ist $\{1, \dots, 2^{n+1}\} = \{1, \dots, 2^n\} \cup \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$.

Bonusaufgabe (Relationsdesign; 4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation mit genau 2023 Äquivalenzklassen, wobei jede Äquivalenzklasse genau 42 Elemente enthält. Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Baumschule; 4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für einen endlichen Graphen (V, E) mit folgender Eigenschaft: Es ist $E \neq \emptyset$ und für alle $e \in E$ ist $(V, E \setminus \{e\})$ ein Baum. Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (komplexe Bits; 4 Punkte). Commander Blorx findet $\mathbb{C}$ zu unübersichtlich und $\mathbb{Z}/2$ zu winzig. Er überlegt sich daher, ob man nicht analog zur Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$ auch einen Körper $\mathbb{B}$ (Blorx-Bits!) aus $\mathbb{Z}/2$ konstruieren könnte, der genau vier Elemente enthält. Funktioniert das? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Evtl. kann auch ein Programm bei der Beantwortung hilfreich sein!

Abgabe bis 4. Dezember 2023, 10:00, via GRIPS

Dies ist das letzte Übungsblatt der Vorlesung *Grundlagen der Mathematik*.