Dungeon Map

7 Reelle und komplexe Zahlen

komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen

$\wr$ „imaginäre Einheit“

reelle Zahlen $\mathbb{R}$ vollständig

$\wr$ „formale Steigungen“

rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ Körper

$\wr$ „formale Brüche“

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ additive Gleichungen lösbar

$\wr$ „formale Differenzen“

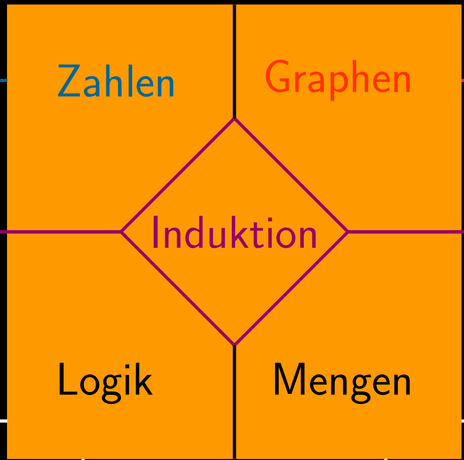
natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ Induktionsprinzip

5 Graphen, Bäume, Modellierung

Graphen:
- ungerichtet: (V, E) mit $E \subset V[2]$
- gerichtet: (V, E) mit $E \subset V \times V$

Bäume:
- nicht-leere, zusammenhängende Graphen ohne Kreise
- alternative Charakterisierung durch Existenz und Eindeutigkeit von Wegen
- spezielle Bäume: binäre Wurzelbäume

Anwendungen: Modellierung von
- Beziehungen zwischen Objekten
- sozialen und anderen Netzwerken
- Färbungs-/Verteilungsproblemen
- Datenstrukturen
- ...



4 Induktion ...

Induktionsprinzip der natürlichen Zahlen:

Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit
- Induktionsanfang: $0 \in A$ und
- Induktionsschritt: für alle $n \in A$ gilt: $n + 1 \in A$,

so folgt $A = \mathbb{N}$.

4 ... und Rekursion

Rekursionsprinzip der natürlichen Zahlen:

Ist A eine Menge, $a \in A$ und $g\colon A \longrightarrow A$ eine Abbildung, so gibt es genau eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ mit
- Rekursionsanfang: $f(0) = a$
- Rekursionsschritt: für alle $n \in A$ gilt: $f(n + 1) = g\big(f(n)\big)$.

1 Syntax und Semantik

Aussagenlogik/Quantorenlogik:

$\left.\begin{array}{r}\text{Syntax}\\ \text{Semantik}\end{array}\right\}$ jeweils per „divide & conquer“

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\Longrightarrow$	impliziert; wenn ..., dann ...
$\Longleftrightarrow$	äquivalent zu; genau dann, wenn
$\forall_x$	Für alle x gilt ...
$\exists_x$	Es existiert ein x mit ...

Aussagenlogische Tautologie: erhält bei jeder w/f-Belegung aller Variablen den Wert w.

2 Beweise

Beweisschritte über eine Sprache/Theorie T:
- Axiome/Voraussetzungen
- quantorenlogische Axiome
- aussagenlogische Tautologien über T
- Modus Ponens
- Generalisierungsregel

Korrektheitssatz (und Vollständigkeit)

Beweisstruktur:
- modularisieren
- abstrahieren
- Baukastenprinzip: Intro/Elim
- Spezielle Beweisstrukturen: Äquivalenzen, Kontraposition, Reductio ad absurdum, Widerspruchsbeweis, ...

3 Mengen und Abbildungen

Mengen:
- sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten;
- wichtige Konstruktionen: $\cap \quad \cup \quad \setminus \quad P(\,\cdot\,) \quad \times \quad \{\dots \mid \dots\} \quad \emptyset$
- $\{x \mid x$ ist eine Menge und $x \notin x\}$ ist *keine* Menge!

Abbildungen:
- sind durch ihren Graphen definiert;
- wichtige Konstruktionen: Komposition, Restriktion

Wichtige Eigenschaften von Abbildungen
- Injektivität
- Surjektivität
- Bijektivität

6 Relationen

Relation:
- auf X: Teilmenge von $X \times X$
- zwischen X und Y: Teilmenge von $X \times Y$

Beispiele:
- gerichtete Graphen
- Abbildungen
- Übergangsrelationen
- Ordnungen

Spezielle Relationen:
- Äquivalenzrelationen
  $\rightsquigarrow$ Äquivalenzklassen
  $\rightsquigarrow$ Quotientenkonstruktionen (z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n$)
- partielle/totale Ordnungen
  $\rightsquigarrow$ Such-/Sortierverfahren bzw. Induktions-/Rekursprinzipien