

Lineare Algebra I^{FIDS}: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 1, 4. Dezember 2023

Fingerübung A (Bubble 1). Berechnen Sie in der symmetrischen Gruppe S_4 :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), \quad (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

Fingerübung B (symmetrische Gruppen). Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Fingerübung C (abelscher Alltag). Welche „Operationen“ im Alltag kommutieren miteinander? Z.B. Brille aufsetzen, Strümpfe anziehen, Schuhe anziehen, Mario-Feuerblume aktivieren, Mario-Pilz aktivieren, schlafen, in die Vorlesung gehen ...

Fingerübung D (Wiederholung). Welche Körper kennen Sie?

Aufgabe 1 (Inversion in Körpern; 4 Punkte). Sei K ein Körper. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ ist $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.
2. Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ ist $(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$.

Aufgabe 2 (Bubble 2; 4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion: Für jede Permutation $f \in S_n$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r \in \{1, \dots, n\}$ mit $f = (x_1\ y_1) \circ (x_2\ y_2) \circ \dots \circ (x_r\ y_r)$.

Hinweis. Wenn Ihnen diese allgemeine Formulierung zu kompliziert ist, können Sie stattdessen auch zeigen, dass die Aussage für $f = (1\ 2\ \dots\ n)$ gilt.

Aufgabe 3 (Neutralität; 4 Punkte). Seien (G, \cdot_G, e_G) und (H, \cdot_H, e_H) Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ eine Abbildung, mit folgender Eigenschaft:

$$\forall_{g,h \in G} f(g \cdot_G h) = f(g) \cdot_H f(h).$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(e_G) = e_H$ gilt.

Hinweis. Was weiß man über $f(e_G \cdot_G e_G)$?

Bonusaufgabe (6 in 5 ?! 4 Punkte). Ein *Nikolauselement* in einer Gruppe (G, \cdot, e) ist ein Element g mit folgender Eigenschaft:

Es ist $g^6 = e$ und für alle $k \in \{1, \dots, 5\}$ gilt $g^k \neq e$.

Der Nikolaus schwärmt davon, dass er am 6. Dezember gefeiert wird, weil folgendes gelte: Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die S_n ein Nikolauselement enthält, ist 6. Commander Blorx hält nicht viel von der Sache und behauptet, dass auch S_5 ein Nikolauselement enthält. Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Es gilt $6 = 2 \cdot 3$ und $5 = 2 + 3$.



Abgabe bis 11. Dezember 2023, 10:00, via GRIPS