Lineare Algebra I^{FIDS}: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold   Blatt 2, 11. Dezember 2023

Fingerübung A (UR-Koordinaten). Betrachten Sie eine der Ecken des Raumes, in dem die Übungen stattfinden, als Nullpunkt in $\mathbb{R}^3$ und die drei angrenzenden Kanten als Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^3$. Welche Koordinaten haben dann die folgenden Punkte?

Mittelpunkt Ihres Tisches, Mittelpunkt der Tafel, Haupteingang zur Mensa, Bajuwarenstr. 4.

Fingerübung B (Vektorrechnung). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $v \in V \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll?

$$\frac{1}{\lambda} \cdot v, \quad v \cdot \lambda, \quad \lambda \cdot \frac{1}{v}, \quad \lambda + v, \quad v - \lambda \cdot v, \quad \lambda^{2023} \cdot v, \quad \lambda \cdot v^{2023}.$$

Fingerübung C (linearer Alltag). Welche Alltagsgegenstände lassen sich gut in „linearer Sprache“ beschreiben? Welche nicht?

Fingerübung D (Untervektorräume?). Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}$?

$$\{0\}, \quad \{0, 2023\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \leq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 2023 \cdot x = 0\}.$$

Aufgabe 1 (Rechnen in Vektorräumen; 4 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für alle $v, w \in V$ ist $v - 2023 \cdot w = 2023 \cdot w - v$.
2. Für alle $v, w \in V$ ist $v + 2023 \cdot (-w) = (-2023) \cdot w + v$.

Aufgabe 2 (von A nach B; 4 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Menge

$$[a, b] := \bigl\{ t \cdot a + (1 - t) \cdot b \bigm| (t \in \mathbb{R}) \land (0 \leq t) \land (t \leq 1) \bigr\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Skizzieren Sie die Menge $[a, b]$ für geeignete Beispiele von a und b in $\mathbb{R}^3$.
2. Ist $[a, b]$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Unterraumschnitt; 4 Punkte). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien U bzw. W Untervektorräume von V. Dann sind die beiden untenstehenden Aussagen äquivalent. Beweisen Sie eine der Implikationen!

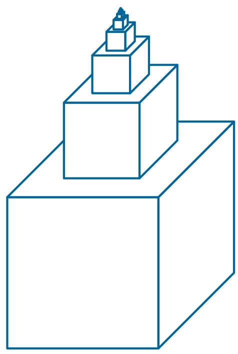
1. Es gilt $U \cap W = \{0\}$.
2. Zu jedem $v \in V$ gibt es höchstens ein Paar $(u, w) \in U \times W$ mit $v = u + w$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (OpenSCAD; 4 Punkte)**.** OpenSCAD (https://www.openscad.org) ist Software (Open Source, GPLv2) zur Modellierung von dreidimensionalen Objekten, zum Beispiel als Vorstufe für 3D-Druck.

1. Was haben translate([x,y,z]) und scale([x,x,x]) mit der gewöhnlichen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}^3$ zu tun?

2. Wie kann man basierend auf dem Würfel cube([1,1,1]) auf einfache Weise einen Turm der folgenden Form beschreiben? Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Hinweis. https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324/src/cubetower_exercise.scad