Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold   Blatt 3, 18. Dezember 2023

Fingerübung A (Matrixmultiplikation)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! Gibt es $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit ...

1. $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Fingerübung B (geometrische LGS)**.** Beschreiben Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen und skizzieren Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme in einem gemeinsamen Koordinatensystem:

1. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 + x_2 = 1$
2. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $-2 \cdot x_1 + x_2 = 2$
3. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Fingerübung C (Matrixpotenzen)**.** Zeigen Sie per vollständiger Induktion: Ist K ein Körper und $x \in K$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (Anzahl der Lösungen; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$, das genau zwei Lösungen besitzt.
2. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$, das genau zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 2 (das kleine Zweimalzwei; 4 Punkte)**.**

1. Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Zeigen Sie: Dann ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ invertierbar und es gilt
$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
2. Verwenden Sie den ersten Teil, um alle $x \in {\mathbb{F}_3}^2$ zu bestimmen, die das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$ erfüllen:
$$\begin{aligned} [2] \cdot x_1 + [4] \cdot x_2 &= [4] \\ [2] \cdot x_1 + [3] \cdot x_2 &= [2] \end{aligned}$$

Bitte wenden

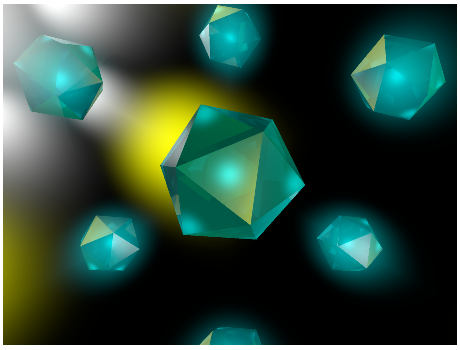
Aufgabe 3 (Rezept; 4 Punkte)**.** Commander Blorx braut seine berüchtigte Weihnachtsbrühe. Dazu verwendet er die folgenden Inhaltsstoffe:

- Kwörx: 1 Gramm Kwörx kostet 8 Gulden und duftet wie 5 Rosen.
- Slurp: 1 Gramm Slurp kostet 5 Gulden und duftet wie eine halbe Rose.
- Pfuiit: 1 Gramm Pfuiit kostet 2 Gulden und duftet wie 9 Rosen.

Das Rezept lautet: Mische so viel Kwörx, Slurp und Pfuiit, dass die entstehende Brühe 42 Gramm wiegt, 100 Gulden kostet und wie 101 Rosen duftet.

Welches lineare Gleichungssystem muss Blorx für die Zubereitung lösen? Ist dieses System homogen oder inhomogen? Beschreiben Sie das Gleichungssystem explizit und mithilfe einer Matrix!

Bonusaufgabe (Raytracing; 4 Punkte)**.** Was ist Raytracing? Wozu werden lineare Gleichungssysteme im Raytracing verwendet? Vergessen Sie nicht, Ihre Erklärungen mit geeigneten Quellen zu belegen!



Falls Sie die „Ferien“ nutzen möchten, um lineare Algebra zu üben ...

Bonusaufgabe (Gruppen; 4 Punkte)**.** Konstruieren Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit genau 42 Elementen, die *nicht* abelsch ist.
Hinweis. $42 = 7 \cdot 6$ und $\#S_3 = 6$.

Bonusaufgabe (Null; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie: Für alle $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot 0 = 0$ (wobei 0 jeweils in V liegt).
2. Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$ (wobei die linke 0 in K und die rechte 0 in V liegt).

Bonusaufgabe (Anzahl der Additionen/Multiplikationen; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$. Wieviele Additionen/Multiplikationen in K sind nötig, um $A \cdot B$ gemäß der Definition der Matrixmultiplikation zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis 8. Januar 2024, 10:00, via GRIPS
Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins Neue Jahr!