# Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold — Blatt 4, 8. Januar 2024

---

**Fingerübung A** (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die folgenden Begriffe: Vektorraum, Untervektorraum, Matrix, Matrixmultiplikation, lineares Gleichungssystem, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme. Welche Eigenschaften kennen Sie bereits?

**Fingerübung B** (3D-Familie)**.** Wir betrachten die Familie $(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist diese Familie linear unabhängig?
2. Ist diese Familie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ?
3. Skizzieren Sie $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$ !

**Fingerübung C** (Elemente zählen)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Gibt es einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit genau 2023 Elementen?
2. Gibt es einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit genau 2024 Elementen?

*Hinweis.* Im Falle eines Falles löst eine Basis wirklich alles ...

---

**Aufgabe 1** (eindeutige Basen; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$ besitzt genau eine Basis.
2. Der $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3$ besitzt genau eine Basis.

**Aufgabe 2** (magische Quadrate; 4 Punkte)**.** Sei $K$ ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *magisches Quadrat über $K$ der Kantenlänge $n$* ist ein $n \times n$-Quadrat mit Einträgen aus $K$ und folgender Eigenschaft: Es gibt ein $m \in K$ (die *magische Zahl*) mit:

- In jeder Zeile ist die Summe der Elemente $m$.
- In jeder Spalte ist die Summe der Elemente $m$.
- In der Haupt- bzw. Antidiagonalen ist jeweils die Summe $m$.

Zum Beispiel ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 4 |
| 4 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 0 |

ein magisches Quadrat über $\mathbb{Q}$ der Kantenlänge 4 mit magischer Zahl 8. Sei $\mathrm{MQ}_n(K)$ die Menge aller magischen Quadrate über $K$ mit Kantenlänge $n$ und magischer Zahl 0. Dann bildet $\mathrm{MQ}_n(K)$ einen $K$-Vektorraum bezüglich kästchenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{MQ}_3(\mathbb{R}) = 2$ ist, indem Sie nachweisen, dass die magischen Quadrate

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 |
| -2 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | -1 |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | -1 |
| -1 | 0 | 1 |
| 1 | -1 | 0 |

eine Basis von $\mathrm{MQ}_3(\mathbb{R})$ bilden.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 3** (lineare Unabhängigkeit und Injektivität; 4 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $(v_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ eine linear unabhängige Familie in $V$. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung injektiv ist:

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j. \end{aligned}$$

*Hinweis.* Differenzen!

**Bonusaufgabe** (Basen zählen; 4 Punkte)**.** Bearbeiten Sie eine der beiden folgenden Aufgaben:

1. Schreiben Sie ein Programm, das die Anzahl aller Basen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums ${\mathbb{F}_2}^5$ bestimmt. Erklären Sie die Funktionsweise Ihre Programms und dokumentieren Sie Ihren Code entsprechend.

2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl aller Basen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^n$. Begründen Sie Ihre Antwort!

---

Abgabe bis 15. Januar 2024, 10:00, via GRIPS