# Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 5, 15. Januar 2024

---

**Fingerübung A** (Matrixmultiplikation). Sei $K$ ein Körper und $a, b, c, d, \lambda \in K$. Berechnen Sie in $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Was passiert dabei mit den Zeilen?

**Fingerübung B** (Fast-Zeilenstufenform). Wir betrachten die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie Basen von $V(A_1, 0)$, $V(A_2, 0)$, $V(A_3, 0)$. Welche Dimension haben diese $\mathbb{R}$-Vektorräume?

**Fingerübung C** (Invertierbarkeit). Testen Sie die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

---

**Aufgabe 1** (lineare Unabhängigkeit; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Spalten der folgenden Matrix sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Die Spalten der folgenden Matrix sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*Hinweis.* Erst denken, dann rechnen!

**Aufgabe 2** (inverse Matrix; 4 Punkte). Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und berechnen Sie zur Probe drei „zufällige“ Koeffizienten des Produkts $A \cdot A^{-1}$.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 3** (Blorx-O-Color; 4 Punkte)**.** Commander Blorx sieht Farben im Blorx-O-Color-Farbmodell, das aus einer additiven Mischung der drei Grundfarben urx ($u$: $\blacksquare$), platsch ($p$: $\blacksquare$) und oink ($o$: $\blacksquare$) besteht. In RGB (Beispiel 4.3.5) lassen sich diese Farben wie folgt spezifizieren:

$$u = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.72 \\ 0.06 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.69 \\ 0.67 \end{pmatrix}, \quad o = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.80 \end{pmatrix}.$$

Genauer gesagt sieht Blorx nur Farben im RGB-Würfel, die durch positive Beiträge der Grundfarben urx, platsch und oink gemischt werden. Kann Blorx die RGB-Farbe

$$\blacksquare = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.49 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

sehen? Gehen Sie wie folgt vor:

1. Übersetzen Sie diese Frage in ein lineares Gleichungssystem.
2. Lösen Sie dieses mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

   *Hinweis.* Sie können ein Computeralgebrasystem verwenden; Sie müssen dann aber begründen, warum das Ergebnis korrekt ist.

**Bonusaufgabe** (XOR-SAT; 4 Punkte)**.** Das *exklusive Oder* $\oplus$ ist durch die folgende Wahrheitstabelle definiert (und offenbar assoziativ):

| $A$ | $B$ | $A \oplus B$ |
|---|---|---|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Wir betrachten das folgende Problem: Kann man die aussagenlogischen Variablen $A$, $B$, $C$, $D$ so mit Wahrheitswerten belegen, dass die Formel

$$\big(A \oplus B \oplus C\big) \wedge \big(A \oplus (\neg B) \oplus D\big) \wedge \big(B \oplus (\neg C) \oplus (\neg D)\big)$$

den Wahrheitswert w liefert? Gehen Sie wie folgt vor (dies ist im allgemeinen Fall effizienter als alle Kombinationen durchzuprobieren):

1. Wenn wir w als $[0] \in \mathbb{F}_2$ und f als $[1] \in \mathbb{F}_2$ interpretieren, welche algebraische Beschreibung besitzt dann $\oplus$ ?
2. Übersetzen Sie die obige Formel in ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ mit vier Variablen und drei Gleichungen (so dass die Lösungen dieses Gleichungssystems genau den Belegungen entsprechen, unter denen die obige Formel den Wahrheitswert w liefert).
3. Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Was bedeutet dies für das ursprüngliche Problem?

---

Abgabe bis 22. Januar 2024, 10:00, via GRIPS