Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 6, 22. Januar 2024

Fingerübung A (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die folgende Begriffe: Vektorraum, Linearkombination, linear (un)abhängig, Basis.

Fingerübung B (linear?)**.** Welche der folgenden vier Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear? Zur Erinnerung: $x_1, x_2, \dots$ sind die Koordinaten von x.

$$\begin{aligned} x &\longmapsto {x_1}^2, & x &\longmapsto x_1 + 1, \\ x &\longmapsto x_1 - x_2, & x &\longmapsto 2024 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Fingerübung C (Anschauung)**.** Visualisieren Sie die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Was sind Kern und Bild dieser Abbildung?

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (kubisch-linear? 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longmapsto x^3$ ist $\mathbb{Q}$-linear.
2. Die Abbildung $\mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$, $x \longmapsto x^3$ ist $\mathbb{F}_3$-linear.

   Hinweis. Kann man diese Abbildung einfacher beschreiben?!

Aufgabe 2 (Vierouette; 4 Punkte)**.** Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{und} \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}.$$

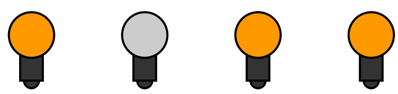
Begründen Sie Ihre Antwort und visualisieren Sie diese Abbildung!
Hinweis. Erst Geometrie, dann Algebra.

Aufgabe 3 (Blorxifikation; 4(+2) Punkte)**.** Der *Blorxifikationsoperator* transformiert fröhlich Konfigurationen von vier Lampen gleichzeitig:

$$\begin{aligned} b \colon {\mathbb{F}_2}^4 &\longrightarrow {\mathbb{F}_2}^4 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - x_1 \\ [2023] \cdot x_1 \\ x_4 + x_2 \\ x_3 - x_2 + [2024] \cdot x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei werden die Lampenzustände durch $\mathbb{F}_2$ modelliert: „aus“ als $[0]$ und „an“ als $[1]$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Konfigurationen $x \in {\mathbb{F}_2}^4$, so dass in $b(x)$ alle Lampen „aus“ sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zum Aufwärmen: Was passiert durch Anwendung von b, wenn alle Lampen „an“ sind?
2. Zeigen Sie, dass b eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung ist, indem Sie eine Matrix B in $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ finden, für die $b = L(B)$ ist.
3. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker b = V(B, 0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Beantworten Sie die Ursprungsfrage und begründen Sie Ihre Antwort.
5. *Bonusaufgabe.* Überprüfen Sie Ihr Ergebnis wie folgt durch *brute force*: Schreiben Sie ein Programm, das den Effekt von b auf *allen* Elementen von ${\mathbb{F}_2}^4$ berechnet und bestimmen Sie so die gesuchte Anzahl an Konfigurationen.



Bitte wenden

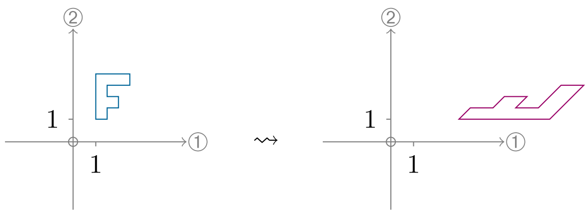
Bonusaufgabe (FerwandlunX; 4 Punkte). Schreiben (und dokumentieren!) Sie ein LaTeX-Makro \Ferwandlung mit vier Argumenten und folgender Eigenschaft: Der Aufruf

$$\text{\Ferwandlung}\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}$$

stellt den Effekt der linearen Abbildung

$$L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auf den Buchstaben „F“ graphisch dar und zeigt auch noch die entsprechende Gleichung an. Zum Beispiel liefert dann \Ferwandlung{1}{2}{1}{0} so etwas wie



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \cdot x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

Welches Ergebnis liefern die folgenden Aufrufe?

- \Ferwandlung{0}{1}{2}{0}
- \Ferwandlung{1}{−1}{0}{1}
- \Ferwandlung{0}{0}{1}{1}
- \Ferwandlung{1}{2}{2}{1}

Hinweis. Bei Graphiken in LaTeX hilft z.B. das Paket tikz.

Abgabe bis 29. Januar 2024, 10:00, via GRIPS