Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold — Blatt 7, 29. Januar 2024

Fingerübung A (Wiederholung). Wiederholen Sie die folgenden Begriffe/Techniken: Basis (schon wieder!), Gaußsches Eliminationsverfahren (jetzt mit korrigierter Proposition 5.1.1) und Gauß-Rezepte, lineare Abbildung, Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen.

Fingerübung B (darstellende Matrizen). Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - x_2 \\ x_1 + 3\cdot x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $M_{B,C}(f)$ für die folgenden Kombinationen von Basen. Muss man dafür wirklich „rechnen"?!

B	C
(e_1, e_2)	(e_1, e_2)
(e_1, e_2)	(e_2, e_1)
(e_1, e_2)	$(2\cdot e_1, e_2)$

Fingerübung C (darstellende Nullmatrix?). Gibt es Basen B, C von $\mathbb{R}^2$, so dass für die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aus Fingerübung B folgendes gilt?

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (darstellende Identitätsmatrix? 4 Punkte). Wir betrachten die $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon {\mathbb{F}_2}^2 &\longrightarrow {\mathbb{F}_2}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie die Basen $B := (e_1, e_2)$ und $C := (e_1 + e_2, e_1)$ von ${\mathbb{F}_2}^2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $M_{C,C}(f) = I_2$; hierbei ist I_2 die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$.
2. Es gilt $M_{B,C}(f) = I_2$.

Aufgabe 2 (lineare Abbildungen und Basen; 4(+4) Punkte). Seien K ein Körper, seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:

1. Ist f injektiv, so ist $(f(v_i))_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie.
2. Ist f surjektiv, so ist $(f(v_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W.

Bonusaufgabe. Beweisen Sie auch die andere Aussage.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (oben und unten; 4 Punkte)**.** Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

vertauscht „oben" und „unten". Sicht durch die Blorxbrille ist durch die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Wie sieht der Effekt von f aus, wenn man die Blorxbrille trägt? D.h.: Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und geben Sie die lineare Abbildung $L(M_{B,B}(f)) \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ explizit an.

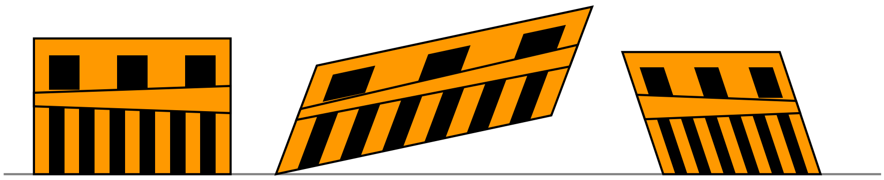
Bonusaufgabe (innen und außen; 4 Punkte)**.** Der begnadete Architekt Numerobis (bekannt aus dem historischen Dokument *Asterix und Kleopatra*) hat „gerade" sein neuestes Gebäude fertiggestellt:

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \cdot x + 2 \cdot y - z \\ 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ x + 4 \cdot y - z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Aufgrund der unkonventionellen Bauweise ist es nicht immer ganz einfach, festzustellen, ob man sich innerhalb des Gebäudes befindet oder nicht …

1. Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem löst und begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist:
   - Gegeben $x \in \mathbb{R}^3$,
   - entscheide, ob x in N liegt oder nicht.
2. Implementieren Sie den Algorithmus, wenden Sie ihn auf die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$ an und geben Sie das Ergebnis an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Abgabe bis 5. Februar 2024, 10:00, via GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt der Vorlesung *Lineare Algebra I*. Blatt 8 besteht aus Bonusaufgaben.