Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 8, 5. Februar 2024

Fingerübung A (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die Grundbegriffe der Vorlesung *Lineare Algebra I*. Was sind wichtige Sätze/Zusammenhänge? Was ist Ihr Lieblingsthema? Testen Sie Ihr Wissen an konkreten Beispielen!

Fingerübung B (Wiederholung, prähistorisch)**.** Wiederholen Sie die Grundbegriffe der Vorlesung *Grundlagen der Mathematik*. Was sind wichtige Sätze/Zusammenhänge? Was ist Ihr Lieblingsthema? Testen Sie Ihr Wissen an konkreten Beispielen!

Fingerübung C (Die Spalten ...)**.** Was hat es mit **Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!** auf sich?

Fingerübung D (Üben hilft!)**.** Welche Probleme kann man mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen? Lösen Sie eine Zillion solcher Aufgaben!

Bonusaufgabe 1 (Quadratisch, praktisch, invertierbar; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede quadratische Matrix ist invertierbar.
2. Jede invertierbare Matrix ist quadratisch.

Bonusaufgabe 2 (Konjugationstrick in Gruppen; 4 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und seien $g, h \in G$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad (h^{-1} \cdot g \cdot h)^n = h^{-1} \cdot g^n \cdot h.$$

Bonusaufgabe 3 (lineare Erbschaft; 4 Punkte)**.** Geben Sie jeweils zunächst präzise Voraussetzungen und formulieren Sie eine präzise Behauptung.

1. Zeigen Sie, dass die Komposition linearer Abbildungen (mit kompatiblen Typen) linear ist.
2. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Untervektorräume (mit kompatiblen Typen) ein Untervektorraum ist.

Bonusaufgabe 4 (Basis-Umrechnung; 4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Darstellung der Vektoren

$$\begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

in ${\mathbb{F}_2}^3$ bezüglich der folgenden Basis (und begründen Sie Ihre Antwort!)

$$\left(\begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix} \right)$$

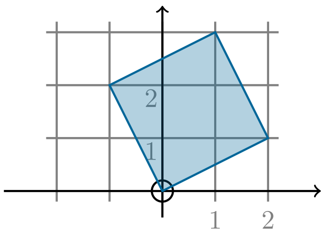
Haben Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren eingesetzt? Falls nicht: Wie hätte man es verwenden können?

Bitte wenden

Bonusaufgabe 5 (Viereck; 4 Punkte)**.** Wir betrachten die skizzierte Menge $V \subset \mathbb{R}^2$.

1. Schreiben Sie V als Menge und begründen Sie, warum Ihre Definition zur Skizze passt.

2. Skizzieren Sie für
$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
die Menge $\{A \cdot x \mid x \in V\}$ und begründen Sie, warum Ihre Skizze tatsächlich diese Menge darstellt.



Bonusaufgabe 6 (Basis-Literatur; 4 Punkte)**.** Wir betrachten den folgenden Ausschnitt aus *Essential Math for Data Science* (Hadrien Jean):

> "The *basis* is a coordinate system used to describe vector spaces (sets of vectors). It is a reference that you use to associate numbers with geometric vectors.
>
> To be considered as a basis, a set of vectors must:
>
> - Be linearly independent.
> - Span the space.
>
> Every vector in the space is a unique combination of the basis vectors. The dimension of a space is defined to be the size of a basis set. For instance, there are two basis vectors in $\mathbb{R}^2$ (corresponding to the x and y-axis in the Cartesian plane), or three in $\mathbb{R}^3$."

https://towardsdatascience.com/essential-math-for-data-science-basis-and-change-of-basis-f7af2348d463

1. Letzter Absatz, erster Satz: Geben Sie eine Begründung (oder eine Referenz aus dem Skript).

2. Letzter Absatz, zweiter Satz: Was muss bei dieser Definition berücksichtigt werden? Welchen Satz verwendet man dabei?

3. Letzter Absatz, dritter Satz: Man könnte (zu Recht) behaupten, dass es in $\mathbb{R}^2$ mehr als zwei Basisvektoren gibt; warum?

4. Im ersten Satz: Ist der bestimmte Artikel in "The *basis*" gerechtfertigt?

Freiwillige Abgabe bis 12. Februar 2024, 10:00, via GRIPS

Alle Punkte zählen als Bonuspunkte.