Dungeon Map

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

8 Matrix Powers!

Berechnung von Potenzen von Matrizen:

- induktiv: direkt/logarithmisch
- über Normalformen/Konjugationstrick

Anwendungen von Potenzen von Matrizen:

- Wege/Kreise zählen in Graphen über Potenzen von Adjazenzmatrizen
- geschlossene Formeln für lineare Rekursionen
- ...

5 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Verfahren zur Lösung lineare Gleichungssysteme

- Geg: Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(L)$, $b \in K^m$
  $\rightsquigarrow$ Zeilenstufenform
  $\rightsquigarrow$ Basis von $V(A,0)$
  und Kriterium für $V(A,b) \neq \emptyset$
  bzw. ein Element von $V(A,b)$

Anwendungen:

- Lösung von (in)homogenen LGS
- Test auf lineare Unabhängigkeit
- Test auf Invertierbarkeit von Matrizen
- Berechnung von inversen Matrizen
- ...

6 Lineare Abbildungen

K-lineare Abbildung: Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen K-Vektorräumen mit

$$\forall_{x,y\in V} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall_{x\in V} \quad \forall_{\lambda\in K} \quad f(\lambda\cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

- Matrizen in $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ entsprechen linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$:
  $\mathrm{M}_{m\times n}(K) \ni A \rightsquigarrow (x \mapsto A\cdot x)$,
  $f\colon K^n \to K^m \rightsquigarrow (f(e_1) \mid \dots \mid f(e_n))$
- Kenngrößen: Kern, Bild, Rang
- Dimensionsformel für $f\colon V \longrightarrow W$:
  $\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f$

Beispiele: Rotationen, Spiegelungen, Streckungen

7 Der Matrizenkalkül

Der Matrizenkalkül basiert auf der universellen Eigenschaft von Basen.

Darstellende Matrix zu $f\colon V \longrightarrow W$ (bezüglich Basen B bzw. C von V bzw. W):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "T_{E_n,B}"] \arrow[r, dashed, "f_{B,C}"'] & K^m \arrow[u, "T_{E_m,C}"'] \end{tikzcd}$$
$$\rightsquigarrow$$
$$M_{B,C}(f) := M(f_{B,C})$$

Ermöglicht: Berechnung von Kern, Rang, Bild ...

3 Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem zu $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$:

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b$

- Lösungsraum:
  $V(A,b) = \{x \in K^n \mid A\cdot x = b\}$
  affiner Untervektorraum von K^n
- LGS ist homogen, falls $b = 0$. Dann: Lösungsraum ist Untervektorraum von K^n
- Ist $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ invertierbar, so ist $V(A,b) = V(S\cdot A, S\cdot b)$
- $V(I_m, b) = \{b\}$

2 Vektorräume

Vektorraum über einem Körper K:
Quadrupel $(V, +, \cdot, 0)$ mit:

- $(V, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- Assoziativität von $\cdot\colon K \times V \longrightarrow V$
- neutrale Skalarmultiplikation mit $1 \in K$
- Distributivität

Beispiele:

- K^n mit komponentenweiser Addition: Geometrie, Bitvektoren, Datenmengen
- Abbildungsräume
- Untervektorräume
- direkte Summen
- ...

4 Basen und Dimension

Eine endliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren ist linear unabhängig, wenn: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt

$$\forall_{i\in I} \quad \lambda_i = 0.$$

Basen: linear unabhängige Erzeugendensysteme.

- Äquivalent: minimales Erzeugendensystem, maximale linear unabhängige Familie
- Jeder Vektorraum hat eine Basis.
- Je zwei Basen im selben Vektorraum haben dieselbe Länge.

Dimension: Länge einer/jeder Basis.

1 Gruppen und ...

Gruppe: Tripel $(G, \cdot, e)$ mit:

- $e \in G$ ist neutral bezüglich $\cdot$
- Assoziativität von $\cdot\colon G \times G \longrightarrow G$
- Existenz von Inversen bezüglich $\cdot$

Abelsch, falls $\cdot$ kommutativ ist.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}/n, +, 0)$
- (Körper, $+, 0$), (Körper $\setminus \{0\}, \cdot, 1$)
- symmetrische Gruppen (i.a. nicht abelsch!)

1 ... Körper

Körper: Quintupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit:

- $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe und $1 \neq 0$;
  dabei ist $\cdot$ eine Abbildung $K \times K \longrightarrow K$
- Distributivgesetz

Beispiele:

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\mathbb{F}_p$ für Primzahlen p