Lineare Algebra I

Für Informatik/Data Science
Wintersemester 2023/24

Clara Löh

Version vom 6. Februar 2024
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

Dungeon Map

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

8 Matrix Powers!

Berechnung von Potenzen von Matrizen:
- induktiv: direkt/logarithmisch
- über Normalformen/Konjugationstrick

Anwendungen von Potenzen von Matrizen:
- Wege/Kreise zählen in Graphen über Potenzen von Adjazenzmatrizen
- geschlossene Formeln für lineare Rekursionen
- ...

5 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Verfahren zur Lösung lineare Gleichungssysteme
- Geg: Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(L)$, $b \in K^m$
  $\rightsquigarrow$ Zeilenstufenform
  $\rightsquigarrow$ Basis von $V(A,0)$
  und Kriterium für $V(A,b) \neq \emptyset$
  bzw. ein Element von $V(A,b)$

Anwendungen:
- Lösung von (in)homogenen LGS
- Test auf lineare Unabhängigkeit
- Test auf Invertierbarkeit von Matrizen
- Berechnung von inversen Matrizen
- ...

6 Lineare Abbildungen

K-lineare Abbildung: Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen K-Vektorräumen mit

$$\forall_{x,y\in V} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall_{x\in V} \quad \forall_{\lambda\in K} \quad f(\lambda\cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

- Matrizen in $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ entsprechen linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$:
  $\mathrm{M}_{m\times n}(K) \ni A \rightsquigarrow (x \mapsto A\cdot x)$,
  $f\colon K^n \to K^m \rightsquigarrow (f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n))$
- Kenngrößen: Kern, Bild, Rang
- Dimensionsformel für $f\colon V \longrightarrow W$:
  $\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f$

Beispiele: Rotationen, Spiegelungen, Streckungen

7 Der Matrizenkalkül

Der Matrizenkalkül basiert auf der universellen Eigenschaft von Basen.

Darstellende Matrix zu $f\colon V \longrightarrow W$ (bezüglich Basen B bzw. C von V bzw. W):

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
K^n \arrow[u, "T_{E_n,B}"] \arrow[r, dashed, "f_{B,C}"'] & K^m \arrow[u, "T_{E_m,C}"']
\end{tikzcd}$$
$$\updownarrow$$
$$M_{B,C}(f) := M(f_{B,C})$$

Ermöglicht: Berechnung von Kern, Rang, Bild ...

3 Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem zu $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$:

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A\cdot x = b$

- Lösungsraum:
  $V(A,b) = \{x \in K^n \mid A\cdot x = b\}$
  affiner Untervektorraum von K^n
- LGS ist homogen, falls $b = 0$. Dann: Lösungsraum ist Untervektorraum von K^n
- Ist $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ invertierbar, so ist $V(A,b) = V(S\cdot A, S\cdot b)$
- $V(I_m, b) = \{b\}$

2 Vektorräume

Vektorraum über einem Körper K:
Quadrupel $(V, +, \cdot, 0)$ mit:
- $(V, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- Assoziativität von $\cdot\colon K \times V \longrightarrow V$
- neutrale Skalarmultiplikation mit $1 \in K$
- Distributivität

Beispiele:
- K^n mit komponentenweiser Addition: Geometrie, Bitvektoren, Datenmengen
- Abbildungsräume
- Untervektorräume
- direkte Summen
- ...

4 Basen und Dimension

Eine endliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren ist linear unabhängig, wenn: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt

$$\forall_{i\in I} \quad \lambda_i = 0.$$

Basen: linear unabhängige Erzeugendensysteme.
- Äquivalent: minimales Erzeugendensystem, maximale linear unabhängige Familie
- Jeder Vektorraum hat eine Basis.
- Je zwei Basen im selben Vektorraum haben dieselbe Länge.

Dimension: Länge einer/jeder Basis.

1 Gruppen und ...

Gruppe: Tripel $(G, \cdot, e)$ mit:
- $e \in G$ ist neutral bezüglich $\cdot$
- Assoziativität von $\cdot\colon G \times G \longrightarrow G$
- Existenz von Inversen bezüglich $\cdot$

Abelsch, falls $\cdot$ kommutativ ist.

Beispiele:
- $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}/n, +, 0)$
- (Körper$, +, 0)$, (Körper $\setminus \{0\}, \cdot, 1)$
- symmetrische Gruppen (i.a. nicht abelsch!)

1 ... Körper

Körper: Quintupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit:
- $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe und $1 \neq 0$;
  dabei ist $\cdot$ eine Abbildung $K \times K \longrightarrow K$
- Distributivgesetz

Beispiele:
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\mathbb{F}_p$ für Primzahlen p

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Mathematik für Informatiker

Alle für uns relevanten Begriffe und Methoden werden in der Vorlesung und im Skript behandelt – und sollen auch so in den Übungen eingesetzt werden. Zusätzliche Quellen können aber für das Gesamtverständnis hilfreich sein. Es gibt sehr viel Literatur mit den folgenden Titeln (oder kleinen Variationen davon):

- Lineare Algebra für Informatiker

- Mathematik für Informatiker

Sie sollten mehrere solche Bücher anschauen und dann entscheiden, (ob) welche davon für Sie als Ergänzung zur Vorlesung geeignet sind. Das Material wird nicht immer in derselben Reihenfolge präsentiert und es gibt bei den Konventionen und Schwerpunkten Unterschiede.

Die nachfolgende Liste enthält Anregungen für vertiefende Literatur – dort wird deutlich mehr (und oft auch deutlich anders) behandelt als in dieser Vorlesung!

Weitere Literanregungen finden Sie auch im Skript zur Vorlesung *Grundlagen der Mathematik* [8].

Lineare Algebra

- S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014.
- G. Fischer. *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*, 18. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- K. Jänich. *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Springer, 2013.
- S. Lang. *Linear Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3. Auflage, Springer, 1987.
- J. Matoušek. *Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra*, *Student Mathematical Library*, 53. American Mathematical Society, 2010.

Beweisen und Problemlösen

- J. Avigad, L. de Moura, S. Kong. *Theorem Proving in Lean*, https://lean-lang.org/theorem_proving_in_lean/, 2023.
- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
- J. Cummings. *Proofs: A Long-Form Mathematics Textbook*, Indepdently published, 2021.
- A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994.
- L. Lamport. How to write a 21st century proof, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 11(1), 43–63, 2012.
- C. Löh. *Exploring Formalisation. A Primer in Human-Readable Mathematics in Lean 3 with Examples from Simplicial Topology*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 11, Springer, 2022.
- S. Mimram. *PROGRAM = PROOF*, Independently published, 2020.
- G. Polya, J.H. Conway (Hrsg.). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.
- T. Tao. *Solving mathematical problems. A personal perspective*, Oxford University Press, 2006.

0

Einführung

Was ist Lineare Algebra?

Die Algebra befasst sich mit der abstrakten Struktur allgemeiner „Zahlenbereiche“. Eine besonders einfache und zugängliche Art solcher Strukturen sind lineare Strukturen, d.h. Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Lineare Strukturen treten an vielen verschiedenen Stellen auf:

- Lösung linearer Gleichungssysteme;
- elementare ebene und räumliche Geometrie;
- Computergeometrie und dreidimensionale Modellierung;
- geschlossene Darstellung kombinatorischer Phänomene;
- als zentraler Approximationsbaustein in der Analysis;
- als erste Abstraktionsstufe in der Algebra;
- ...

Wie wir sehen werden, sind lineare Strukturen sehr gut verstanden und können effizient bei Berechnungen eingesetzt werden. Daher versucht man in vielen anderen Gebieten der Mathematik, kompliziertere Strukturen auf lineare Strukturen zu reduzieren. Zum Beispiel ist der Ableitungsbegriff der Analysis nichts anderes als eine lineare Approximation an kompliziertere Funktionen. Auch lineare Regressionen in der Statistik basieren auf diesem vereinfachenden, linearisierenden Prinzip.

Auch wenn in vielen Anwendungen „nur“ die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ auftreten, lohnt es sich, die Theorie allgemeiner zu entwickeln: Einerseits wird dann deutlicher, welche Phänomene mit der linearen Struktur zusammenhängen. Andererseits lassen sich die Ergebnisse und Methoden direkt auf andere Vektorräume übertragen, z.B. auf Vektoren von Bits oder auf Funktionenräume. Diese Verallgemeinerungen treten auch in den Anwendungen in der Informatik und Data Science in natürlicher Weise auf.

Wozu Lineare Algebra in der Informatik?

Algebraische Strukturen treten auf vielfältige Art und Weise in der Informatik und Data Science auf – sowohl in der Modellierung von Konzepten und Anwendungen als auch bei der Analyse von Algorithmen:

- Modellierung, Analyse und Berechnung in der Computergraphik
- Modellierung, Analyse und Berechnung physikalischer Modelle
- Formalisierung, Analyse und Umsetzung von Modellen des maschinellen Lernens
- Entwurf und Umsetzung effizienter Anordnung von Websites (wie z.B. PageRank)
- Analyse von Irrfahrten/Wegen auf Graphen
- Analyse von Algorithmen mithilfe von erzeugenden Funktionen

Umgekehrt können Methoden aus der Informatik auch zu einem besseren Verständnis algebraischer Strukturen und der linearen Algebra eingesetzt werden:

- Effiziente algorithmische Umsetzung von Berechnungsverfahren aus der linearen Algebra
- Visualisierung mathematischer Phänomene der (linearen) Algebra
- Experimentelle Erkundung von Strukturen oder Behauptungen; insbesondere Suche nach Gegenbeispielen oder Plausibilitätsprüfung

Über diese Vorlesung

In dieser Vorlesung werden wir uns mit grundlegenden Begriffen und Techniken aus der Linearen Algebra vertraut machen:

- Grundlegende algebraische Strukturen, insbesondere Körper;
- Vektorräume und lineare Abbildungen;
- Lineare Gleichungssysteme und das Gaußsche Eliminationsverfahren;
- Matrizenkalkül;
- Anschauung der linearen Algebra.

Wir werden diese Themen jeweils mit Beispielen aus der Informatik bzw. Data Science illustrieren. Zusätzlich zu diesen Beispielen ist es essentiell, sich mit der algebraischen Denkweise vertraut zu machen, um fortgeschrittene Konzepte und Analysen in der Informatik bzw. Data Science verstehen und verwenden zu können.

Anmerkung zum Lernen (Skript)**.** Dieses Vorlesungsskript dokumentiert den Fortschritt dieser Vorlesung, die besprochenen Themen und zusätzliches optionales Material. Der Besuch der Vorlesung erleichtert es, die Entwicklung der Begriffe, Beweise, etc. nachzuvollziehen. Zusätzliches Material wird in GRIPS und auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt:

https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324

Die Anwendungsabschnitte und Ausblicke sind *nicht* prüfungsrelevant, sondern dienen der Allgemeinbildung.

Anmerkung zum Lernen (Fingerübungen)**.** Dieses Vorlesungsskript enthält einige Selbsttests und Fingerübungen, deren Feedback teilweise in die PDF-Datei integriert ist. Diese Funktionalität beruht auf PDF Layers (nicht auf JavaScript) und wird von vielen PDF-Viewern unterstützt, z.B. Acrobat Reader, Evince, Foxit Reader, Okular, ... Einfacher Test, ob das funktioniert: Haben Sie auf "Nein" gedrückt?

Ja Nein Nein, Sie haben nicht getan, was Sie behauptet haben

Sie sollten natürlich erst dann die Hinweise und Antworten ansehen, wenn Sie bereits über das Problem nachgedacht haben; man kann schließlich nie wissen, was passiert, wenn man voreilig auf irgendeinen Knopf drückt.

GROAAARR!

Literaturaufgabe (Bibliothek)**.** Wie finden Sie im Regensburger Katalog und in der Teilbibliothek Mathematik Literatur über die Themen der Vorlesung? Welche weiteren Informationsquellen könnten nützlich sein?

Konvention. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält 0 [8, Kapitel 4].

1

Gruppen und Körper

Die zentrale Struktur der Linearen Algebra sind Vektorräume. Vektorräume sind eine Verallgemeinerung der Addition und Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^n$. Die Skalare stammen dabei aus dem Grundkörper – im Falle von $\mathbb{R}^n$ ist dies der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Um das Arbeiten mit abstrakten Strukturen zu üben, beginnen wir zunächst mit einer übersichtlicheren Struktur: Gruppen. Darau aufbauend behandeln wir einfache arithmetische Eigenschaften von Körpern. In Kapitel 2 werden wir Vektorräume einführen und mit ähnlichen Methoden grundlegende „Rechenregeln“ in Vektorräumen herleiten.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1 Algebraische Strukturen

Algebraische Strukturen bestehen zumeist aus einer Trägermenge, Operationen zwischen Elementen auf dieser Trägermenge, sowie speziellen Elementen und erfüllen gewisse Verträglichkeitsbedingungen. Typische Bedingungen dieser Art sind Assoziativität, Kommutativität, Neutralität, Distributivität, Existenz von Inversen .... Zum Beispiel sind Körper algebraische Strukturen dieser Art:

Definition 1.1.1 (Körper)**.** Ein *Körper* ist ein Quintupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$, bestehend aus

- einer Menge K,
- Abbildungen $+, \cdot : K \times K \longrightarrow K$,
- Elementen $0, 1 \in K$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Addition.* Die Abbildung $+ \colon K \times K \longrightarrow K$ besitzt die folgenden Eigenschaften:
  - *Neutrales Element.* Für alle $x \in K$ gilt $x + 0 = x$ und $x = 0 + x$.
  - *Assoziativität.* Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$.
  - *Kommutativität.* Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
  - *Existenz von Inversen.* Für alle $x \in K$ gibt es ein $y \in K$ mit $x + y = 0$.
- *Multiplikation.* Die Abbildung $\cdot : K \times K \longrightarrow K$ besitzt die folgenden Eigenschaften:
  - *Neutrales Element.* Es ist $1 \neq 0$ und für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 1 = x$ und $x = 1 \cdot x$.
  - *Assoziativität.* Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
  - *Kommutativität.* Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
  - *Existenz von Inversen.* Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in K$ mit $x \cdot y = 1$.
- *Distributivgesetz.* Es gilt

$$\forall_{x,y,z \in K} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Falls die Daten $+$, $\cdot$, 0, 1 aus dem Kontext klar sind, sagt man auch „Sei K ein Körper ...“.

Bei dieser Definition von Körpern fällt auf, dass an Addition und Multiplikation ähnliche Anforderungen gestellt werden. Wie in der Programmierung sollten auch in der mathematischen Begriffsbildung Wiederholungen durch gemeinsame Abstraktionen ersetzt werden. Dadurch wird die Theorie modularer, robuster, und insgesamt schlanker.

Im Falle von Körpern bietet es sich an, die additive und multiplikative Struktur jeweils durch den Gruppenbegriff zu beschreiben.

1.2 Gruppen

Gruppen sind algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung, die assoziativ ist, ein neutrales Element besitzt und über Inverse Elemente verfügt.

1.2.1 Gruppen

Definition 1.2.1 (Gruppe)**.** Eine *Gruppe* ist ein Tripel $(G, \cdot, e)$, bestehend aus

- einer Menge G,
- einer Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$,
- einem Element $e \in G$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Neutrales Element.* Für alle $g \in G$ ist $g \cdot e = g$ und $g = e \cdot g$.
- *Assoziativität.* Für alle $g, h, j \in G$ gilt $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$.
- *Existenz von Inversen.* Für alle $g \in G$ gibt es ein $h \in G$ mit $g \cdot h = e$ und $e = h \cdot g$.

Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt *abelsch*, wenn zusätzlich gilt:

- *Kommutativität.* Für alle $g, h \in G$ ist $g \cdot h = h \cdot g$.

Falls die Daten $\cdot$ und e aus dem Kontext klar sind, sagt man auch „Sei G eine Gruppe . . . “.

Beispiel 1.2.2 (Gruppen in Körpern)**.** Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper.

- Dann ist $(K, +, 0)$ eine (abelsche) Gruppe, die *additive Gruppe* des Körpers.
- Und es ist $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine (abelsche) Gruppe, die *multiplikative Gruppe* des Körpers. Diese wird manchmal auch mit $K^\times$ bezeichnet.

Man beachte, dass $(K, \cdot, 1)$ *keine* Gruppe ist, denn 0 besitzt kein multiplikatives Inverses; hier geht ein, dass $0 \neq 1$ ist.

Beispiel 1.2.3 (die ganzen Zahlen). Wir wissen bereits, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ eine (abelsche) Gruppe bildet [8, Kapitel 6]. Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so bildet $(\mathbb{Z}/n, +, [0])$ eine (abelsche) Gruppe [8, Kapitel 6]. Aber $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist *keine* Gruppe, denn 1 besitzt kein additives Inverses.

Beispiel 1.2.4 (symmetrische Gruppen). Sei X eine Menge. Dann ist $(S_X, \circ, \mathrm{id}_X)$ eine Gruppe, wobei

$$S_X := \bigl\{f \colon X \longrightarrow X \bigm| f \text{ ist bijektiv}\bigr\}.$$

Denn: Wir wissen bereits, dass die Abbildungskomposition assoziativ ist und dass id_X neutral bezüglich Komposition ist [8, Kapitel 3]. Außerdem ist Bijektivität zur Existenz einer inversen Abbildung äquivalent [8, Kapitel 3], woraus man die Existenz von Inversen erhält.

Man bezeichnet S_X als *symmetrische Gruppe über* X, da sie aus den „mengentheoretischen Symmetrien von X“ besteht. Zu $n \in \mathbb{N}$ schreibt man auch kurz S_n für die symmetrische Gruppe $(S_{\{1,\dots,n\}}, \circ, \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}})$. Die Gruppe S_n enthält also alle Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$. Ist $f \in S_n$, so schreibt man diese Abbildung auch in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Ist $r \in \{1, \dots, n\}$ und sind $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so schreibt man

$$(k_1\ k_2\ \dots k_r)$$

für die Permutation, die

$$k_1 \longmapsto k_2, \quad k_2 \longmapsto k_3, \quad \dots \quad k_{r-1} \longmapsto k_r, \quad k_r \longmapsto k_1$$

erfüllt und auf allen Elementen aus $\{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$ als Identität wirkt.

Zum Beispiel gilt in S^3:

$$\begin{aligned}
(1\ 2) \circ (1\ 2) &= \text{?} \quad \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} \\
(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) &= \text{?} \quad (1\ 3\ 2) \\
(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) &= \text{?} \quad \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} \\
(1\ 2) \circ (1\ 2\ 3) &= \text{?} \quad (2\ 3) \\
(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2) &= \text{?} \quad (1\ 3).
\end{aligned}$$

Die Gruppe S_3 ist also *nicht* abelsch.

Induktiv sieht man, dass S_n genau $n!$ Elemente enthält (nachrechnen!) und dass S_n von Transpositionen (d.h. von Elementen der Form $(j\ k)$ mit $j \neq k$) erzeugt wird (Übungsaufgabe). Letzteres wird in In-Place-Sortieralgorithmen wie z.B. Bubble-Sort ausgenutzt.

Proposition 1.2.5 (Rechnen in Gruppen). *Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

1. Eindeutigkeit des neutralen Elements. *Ist $f \in G$ ein neutrales Element (d.h. für alle $g \in G$ gilt $g \cdot f = g$ und $f \cdot g = g$), so folgt bereits $f = e$.*

2. Eindeutigkeit von Inversen. *Ist $g \in G$, so gibt es genau ein Element $h \in G$ mit $g \cdot h = e$ und $h \cdot g = e$. Man nennt dieses Element das* Inverse von g *und bezeichnet es mit g^{-1}.*

3. Inverse von Inversen und Produkten. *Es ist $e^{-1} = e$ und für alle $g, h \in G$ gilt*
$$(g^{-1})^{-1} = g \quad \textit{und} \quad (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}.$$

4. Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen. *Seien $g, h \in G$. Dann gibt es genau ein $x \in G$ mit $g \cdot x = h$, nämlich $x = g^{-1} \cdot h$.*

Anmerkung zum Lernen. Die folgenden Argumente kehren in der Algebra häufig in ähnlicher Form wieder auf. Es lohnt sich daher, diese gut zu üben.

Beweis. Zu 1. Ist f ein neutrales Element, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f &= f \cdot e && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \\ &= e. && \text{(da } f \text{ neutral ist)} \end{aligned}$$

Zu 2. Die *Existenz* von Inversen wird durch die Gruppenaxiome garantiert.

Zur *Eindeutigkeit* von Inversen: Sei $g \in G$ und seien $h, k \in G$ Inverse von g. Dann gilt („Nullergänzung")

$$\begin{aligned} h &= h \cdot e && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \\ &= h \cdot (g \cdot k) && \text{(da } k \text{ invers zu } g \text{ ist)} \\ &= (h \cdot g) \cdot k && \text{(Assoziativität)} \\ &= e \cdot k && \text{(da } h \text{ invers zu } g \text{ ist)} \\ k&. && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \end{aligned}$$

Zu 3. Da e neutral ist, ist $e \cdot e = e$. Also erfüllt e die Anforderungen an das Inverse von e und es folgt mit der Eindeutigkeit des Inversen, dass $e^{-1} = e$.

Wegen $g^{-1} \cdot g = e$ und $g \cdot g^{-1} = e$ erfüllt g die Anforderungen an das Inverse von g^{-1} und es folgt mit der Eindeutigkeit des Inversen, dass $(g^{-1})^{-1} = g$.

Wegen

$$\begin{aligned}
(g\cdot h)\cdot(h^{-1}\cdot g^{-1}) &= g\cdot(h\cdot h^{-1})\cdot g^{-1} && (\text{? Assoziativität})\\
&= g\cdot e\cdot g^{-1} && (\text{? da } h^{-1} \text{ zu } h \text{ invers ist})\\
&= g\cdot g^{-1} && (\text{? da } e \text{ neutral ist})\\
&= e && (\text{? da } g^{-1} \text{ zu } g \text{ invers ist})
\end{aligned}$$

und (analog) $(h^{-1}\cdot g^{-1})\cdot(g\cdot h) = e$ erfüllt $h^{-1}\cdot g^{-1}$ die Anforderungen an das Inverse von $(g\cdot h)^{-1}$. Mit der Eindeutigkeit des Inversen folgt $(g\cdot h)^{-1} = h^{-1}\cdot g^{-1}$.

Zu 4. Existenz. Für $x := g^{-1}\cdot h$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
g\cdot x &= g\cdot(g^{-1}\cdot h)\\
&= e\cdot h\\
&= h.
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit. Sei $y\in G$ mit $g\cdot y = h$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
y = e\cdot y &= g^{-1}\cdot g\cdot y\\
&= g^{-1}\cdot h\\
&= g^{-1}\cdot g\cdot x = e\cdot x\\
&= x,
\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Da wir diese Eigenschaften für alle Gruppen bewiesen haben, gelten sie insbesondere in jedem der obigen Beispiele.

Notation 1.2.6. Wird die Gruppe additiv notiert, so schreibt man $-g$ für das Inverse des Elements g.

Bemerkung 1.2.7 (Struktur vs. Eigenschaften)**.** Der Gruppenbegriff kann unterschiedlich formalisiert werden; die subtilen Unterschiede spielen im Normalfall keine Rolle. Zum Beispiel könnte man nur die Existenz eines neutralen Elements fordern, statt ein neutrales Element als Teil der Struktur zu spezifizieren.

Ausblick 1.2.8 (Monoide)**.** Verzichtet man in der Definition von Gruppen auf die Existenz von Inversen, so gelangt man zum Begriff des *Monoids*. Zum Beispiel sind $(\mathbb{N}, +, 0)$ und $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ kommutative Monoide.

1.2.2 Gruppenhomomorphismen

Zu algebraischen Objekten betrachtet man immer auch die zugehörigen „strukturerhaltenden Morphismen“. Im Falle der Gruppen sind dies Gruppenhomomorphismen:

Definition 1.2.9 (Gruppenhomomorphismus, Gruppenisomorphismus)**.** Seien $(G, \cdot_G, e_G)$ und $(H, \cdot_H, e_H)$ Gruppen.

- Ein *Gruppenhomomorphismus* $G \longrightarrow H$ ist eine Abbildung $f \colon G \longrightarrow H$ mit:

$$f(e_G) = e_H \quad \text{und} \quad \forall_{g,h \in G} \quad f(g \cdot_G h) = f(g) \cdot_H f(h).$$

- Ein Gruppenhomomorphismus $f \colon G \longrightarrow H$ ist ein *Gruppenisomorphismus*, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $g \colon H \longrightarrow G$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_H \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_G$$

gibt. In diesem Fall nennt man die Gruppen G und H *isomorph* und schreibt $G \cong H$.

Beispiel 1.2.10. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} n\cdot \,:\, \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto n \cdot x \end{aligned}$$

(wobei sich $\cdot$ auf die gewöhnliche multiplikative Struktur von $\mathbb{Z}$ bezieht!) ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 1 + x \end{aligned}$$

ist jedoch *kein* Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$, denn z.B. wird das neutrale Element 0 auf $1 + 0 = 1 \neq 0$ abgebildet.

Beispiel 1.2.11. Die Gruppen $(\mathbb{Z}/6, +, [0])$ und S_3 haben beide genau sechs Elemente. Sie sind aber *nicht* isomorph, denn die additive Gruppe $\mathbb{Z}/6$ ist abelsch, aber S_3 ist nicht abelsch (Beispiel 1.2.4) – und die Eigenschaft abelsch zu sein bleibt unter Gruppenisomorphismen erhalten (nachrechnen!).

Bemerkung 1.2.12. Seien $(G, \cdot_G, e_G)$ und $(H, \cdot_H, e_H)$ Gruppen und sei $f \colon G \longrightarrow H$ eine Abbildung, die mit den Verknüpfungen verträglich ist:

$$\forall_{g,h \in G} \quad f(g \cdot_G h) = f(g) \cdot_H f(h).$$

Dann ist f bereits ein Gruppenhomomorphismus, denn: Man kann nachrechnen, dass $f(e_G) = e_H$ bereits aus dieser Verträglichkeit folgt (Übungsaufgabe).

1.3 Körper

Mithilfe des Begriffs der Gruppe können wir nun die Definition von Körpern wie folgt schlanker und transparenter umformulieren:

Proposition 1.3.1 (Körper via Gruppen). *Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Quintupel, bestehend aus*

- *einer Menge K,*
- *Abbildungen $+, \cdot \colon K \times K \longrightarrow K$,*
- *Elementen $0, 1 \in K$.*

Dann ist dieses Quintupel genau dann ein Körper, wenn folgendes gilt:

- *Es ist $(K, +, 0)$ eine abelsche Gruppe.*
- *Es ist $0 \neq 1$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe.*
- *Es gilt das Distributivgesetz:*

$$\forall_{x,y,z \in K} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Beweis. Dies folgt aus einem direkten Vergleich der Begriffe. □

Insbesondere gelten alle elementaren Rechentechniken aus Gruppen sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation in Körpern. Außerdem gelten die folgenden Zusammenhänge zwischen Addition und Multiplikation:

Proposition 1.3.2 (Rechnen in Körpern). *Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Dann gilt:*

1. *Für alle $x \in K$ ist $0 \cdot x = 0$.*
2. *Für alle $x \in K$ ist $-x = (-1) \cdot x$. Insbesondere ist $(-1) \cdot (-1) = 1$.*
3. Nullteilerfreiheit. *Für alle $x, y \in K$ gilt: Ist $x \cdot y = 0$, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$.*

Beweis. Zu 1. Sei $x \in K$ und sei $y \in K$ das additive Inverse von $x \cdot 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \cdot x + y && \text{(da y zu $0 \cdot x$ bzgl. $+$ invers ist)}\\
&= (0 + 0) \cdot x + y && \text{(0 ist neutral bzgl. $+$)}\\
&= (0 \cdot x + 0 \cdot x) + y && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= 0 \cdot x + (0 \cdot x + y) && \text{(Assoziatitvität der Addition)}\\
&= 0 \cdot x + 0 && \text{(da y zu $0 \cdot x$ bzgl. $+$ invers ist)}\\
&= 0 \cdot x. && \text{(0 ist neutral bzgl. $+$)}
\end{aligned}$$

Zu 2. Sei $x \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && (\text{1 ist neutral bzgl. } \cdot\,) \\ &= \bigl(1 + (-1)\bigr) \cdot x && (\text{Distributivgesetz}) \\ &= 0 \cdot x && (\text{da } -1 \text{ zu 1 bzgl. } + \text{ invers ist}) \\ &= 0. && (\text{nach dem ersten Teil}) \end{aligned}$$

Da die Addition kommutativ ist, folgt auch $(-1) \cdot x + x = 0$. Also ist $(-1) \cdot x$ das (!) additive Inverse von x, d.h. es gilt $-x = (-1) \cdot x$.

Insbesondere ist $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$; die letzte Gleichheit folgt dabei aus Proposition 1.2.5.3.

Zu 3. Wir beweisen die Aussage durch Kontraposition. Seien $x, y \in K$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann zeigt dieselbe Rechnung wie in Proposition 1.2.5.3, dass $x \cdot y$ ein multiplikatives Inverses besitzt (nämlich $y^{-1} \cdot x^{-1}$). Insbesondere ist daher $x \cdot y \neq 0$ (nachrechnen!). □

Caveat 1.3.3. Sei K ein Körper. Die rekursiv definierte kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} 1 \end{aligned}$$

ist im allgemeinen *nicht* injektiv. Z.B. ist $\mathbb{Z}/2$ bezüglich der gewöhnlichen Addition/Multiplikation ein Körper [8, Kapitel 7], aber unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ werden 0 und 2 auf $[0]$ abgebildet. Insbesondere darf man Körpern im allgemeinen *nicht* einfach durch „2“, … dividieren.

Bemerkung 1.3.4 (Körperhomomorphismen)**.** Analog zu Gruppen kann man Körperhomomorphismen bzw. Körperisomorphismen definieren, indem man Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation fordert. Wir werden diese Begriffe aber im folgenden eigentlich nicht benötigen.

Ausblick 1.3.5 (endliche Körper)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$. Man kann folgendes zeigen [6, Kapitel 3.3, 2.2.3]:

- Es bildet $\mathbb{Z}/n$ genau dann bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Restklassen einen Körper, wenn n eine Primzahl ist. Ist $p \in \mathbb{N}$ prim, so bezeichnet man den auf $\mathbb{Z}/p$ basierenden Körper normalerweise mit $\mathbb{F}_p$.

- Ist $p \in \mathbb{N}$ prim und $r \in \mathbb{N}_{>0}$, so gibt es einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) Körper, der genau p^r Elemente enthält.

1.4 Anwendung*: Transformationen

1.4.1 ~~Gruppen~~ Monoide

Gruppen werden in vielen Anwendungsgebieten genutzt, um Symmetrien oder (umkehrbare) Transformationen zu beschreiben. In der Informatik treten häufig Transformationen auf, die nicht invertierbar sind; wenn Assoziativität gegeben ist, können solche Transformationen durch Monoide (bzw. ihre Elemente) modelliert werden (Ausblick 1.2.8).

Möchte man zum Beispiel analysieren, inwiefern sich ein Algorithmus oder Programm parallelisieren lässt, so hängt dies mit der Frage zusammen, welche Operationen in dem entsprechenden Monoid kommutieren.

1.4.2 Linear Feedback Shift Registers

Die Theorie endlicher Körper erlaubt es, interessante Transformationen auf Bit-Wörtern zu beschreiben, zu konstruieren und zu analysieren, die auf geeigneter Hardware sehr effizient ausgeführt werden können.

Zum Beispiel wird die Theorie endlicher Körper mit 2^n Elementen systematisch für sogenannte *Linear Feedback Shift Registers (LFSR)* genutzt [6, Kapitel 3.3.2]. Es gibt etwa ein LFSR, mit dem man sehr effizient alle 255 invertierbaren Elemente des Körpers mit $2^8 = 256$ Elementen auflisten kann bzw. zyklisch auf diesen operieren kann. Bei der Standardkodierung der 256 Elemente als 8 Bits ergibt sich dabei eine „durcheinander wirkende“ Reihenfolge. Solche Effekte können für die Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen oder zur Berechnung von Prüfsummen in RAID(6) genutzt werden.

2

Vektorräume

Aufbauend auf dem Begriff des Körpers führen wir die grundlegenden Objekte der linearen Algebra ein: Vektorräume.

Vektorräume dienen der bequemen und präzisen Beschreibung des zwei- bzw. dreidimensionalen Anschauungsraums sowie hochdimensionaler Datenmengen. Außerdem gibt es viele weitere natürlich auftretende Situationen in der Analysis, der Algebra, ... und in den Anwendungen, die sich gut durch Vektorräume modellieren lassen.

Wir führen Grundbegriffe zu Vektorräumen sowie Untervektorräume und Standardkonstruktionen auf Vektorräumen ein. Den bereits angedeuteten Begriff der „Dimension“ werden wir in Kapitel 4 behandeln. Die strukturerhaltenden Morphismen zwischen Vektorräumen sind lineare Abbildungen (Kapitel 6).

Überblick über dieses Kapitel.

2.1 Vektorräume

Als Vorbereitung für die Definition des Vektorraums erinnern wir an Grundbegriffe aus der Geometrie in kartesischen Koordinaten.

2.1.1 Geometrie in Koordinaten

Die Geometrie hat sich von ihren Anfängen in der Antike zu einem vielseitigen mathematischen Gebiet entwickelt, das eng mit anderen Gebieten der Mathematik und Informatik, Physik, ... verbunden ist.

Eine der Revolutionen der Geometrie war die Erkenntnis von Descartes, dass man geometrische Objekte (zum Beispiel Punkte, Geraden, ...) in der ebenen und räumlichen Geometrie durch Koordinaten beschreiben kann und damit viele geometrische Probleme rechnerisch lösen kann. Dies führt zu den (nach Descartes benannten!) kartesischen Koordinatensystemen.

Definition 2.1.1 (Menge der n-Tupel)**.** Sei K ein Körper. Wir schreiben

$$K^0 := \{0\} \subset K.$$

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

Die n-Tupel in K^n werden auch als *Spaltenvektoren* bezeichnet. Ist $x \in K^n$, so schreiben wir $x_1, \dots, x_n$ für die n *Koordinaten* (d.h. die Zeilen, in dieser Reihenfolge) von x. Zwei n-Tupel $x, y \in K^n$ sind genau dann gleich, wenn:

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad x_j = y_j$$

Wir schreiben für Spaltenvektoren $x \in K^n$ in Koordinaten auch $(x_1, \dots, x_n)^\top$.

Der Grund dafür, dass wir Elemente von K^n als Spaltenvektoren ansehen wollen, wird sich im Zusammenhang mit der Multiplikation von Matrizen erschließen (Kapitel 3.2.2).

Beispiel 2.1.2 (Anschauungsraum der Geometrie)**.** Den zweidimensionalen Anschauungsraum kann man in dieser Notation als $\mathbb{R}^2$ modellieren (Abbildung 2.1), den dreidimensionalen Anschauungsraum als $\mathbb{R}^3$. Diese Sichtweise

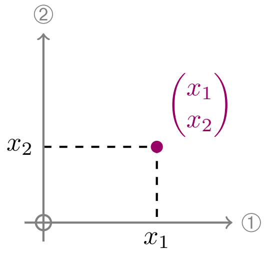


Abbildung 2.1.: Punkte und Koordinaten in $\mathbb{R}^2$, schematisch

spielt auch in der Computergraphik eine entscheidende Rolle – die Modellierung von zwei- bzw. dreidimensionalen Objekten erfolgt im Normalfall in kartesischen Koordinaten.

Beispiele für grundlegende geometrische Operationen sind das Verschieben von Objekten im Anschauungsraum und das Skalieren von Objekten im Anschauungsraum (Abbildung 2.2).

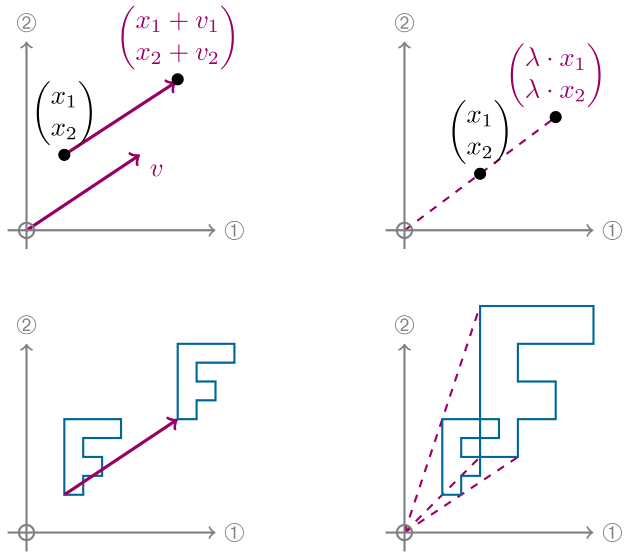


Abbildung 2.2.: Verschieben und Skalieren in $\mathbb{R}^2$

Was bedeutet dies in kartesischen Koordinaten? Verschieben von Punkten in $\mathbb{R}^2$ um $v \in \mathbb{R}^2$ wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beschrieben. Das Reskalieren von $\mathbb{R}^2$ um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

Diese grundlegenden geometrischen Operationen sind der Ursprung des Vektorraumbegriffs. Insbesondere hängt das Reskalieren mit dem Begriff des Skalars bzw. der Skalarmultiplikation zusammen und das Verschieben ist der Ursprung des Begriffs des Vektors (von lateinisch *vectare*, was in etwa „tragen", „transportieren" bedeutet).

Es wird sich herausstellen, dass der Begriff des Vektorraums so gut gewählt ist, dass sich viele weitere geometrische Transformationen und auch viele weitere theoretische und praktische Situationen gut damit modellieren lassen.

2.1.2 Definition

Inspiriert von der kartesischen Geometrie führt man den Begriff des Vektorraums folgendermaßen ein:

Definition 2.1.3 (Vektorraum)**.** Sei K ein Körper. Ein *K-Vektorraum* ist ein Quadrupel $(V, +, \cdot, 0)$, bestehend aus

- einer Menge V,
- einer Abbildung $+ \colon V \times V \longrightarrow V$,
- einer Abbildung $\cdot \colon K \times V \longrightarrow V$,
- einem Element $0 \in V$

mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $(V, +, 0)$ eine abelsche Gruppe.
- *Assoziativität.* Für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v \in V$ gilt
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$$
- *Neutrale Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ gilt
$$1 \cdot v = v.$$

- *Distributivität.* Für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \text{und} \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$$

Die Elemente von V heißen *Vektoren.* Wir bezeichnen „$+$" als *Addition auf* V und $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ als *Skalarmultiplikation.*

Oft unterdrückt man in der Notation auch die Verknüpfungen und sagt kurz (aber etwas schlampig), dass „V ein K-Vektorraum" ist.

Anmerkung zum Lernen. Es ist eine gute Übung, sich in dieser Definition genau zu überlegen, welche Addition/Multiplikation in K bzw. V stattfindet.

Caveat 2.1.4 (Multiplikation)**.** Sei K ein Körper und sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein K-Vektorraum. Man beachte, dass die Skalarmultiplikation Skalare mit Vektoren multipliziert (was Vektoren liefert). Im allgemeinen können in einem Vektorraum *nicht* zwei Vektoren „sinnvoll" miteinander multipliziert werden (um wieder einen Vektor zu erhalten).

Caveat 2.1.5 (Skalarprodukt)**.** Die Skalarmultiplikation darf nicht mit sogenannten Skalarprodukten (einem geometrischen Begriff aus der linearen Algebra; Lineare Algebra II) verwechselt werden!

2.1.3 Beispiele

Als erstes überprüfen wir, dass das Leitbeispiel mit der eingeführten Abstraktion kompatibel ist:

Proposition 2.1.6 (Vektorraum der n-Tupel)**.** *Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet K^n mit den Abbildungen*

$$\begin{aligned} +\colon K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und dem Nullvektor $0 := (0, \dots, 0)^\top$ einen K-Vektorraum.

Beweis. All diese Eigenschaften lassen sich komponentenweise nachrechnen und sind dann Folgerungen der entsprechenden Eigenschaften von K. Wir geben stellvertretend den Beweis für die Assoziativität der Skalarmultiplikation: Seien also $\lambda, \mu \in K$ und $x \in K^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot \mu) \cdot x &= \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot x_1 \\ \vdots \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x_n \end{pmatrix} && \text{(Definition der Skalarmultiplikation in } K^n\text{)} \\
&= \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} \lambda \cdot (\mu \cdot x_1) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x_n) \end{pmatrix} && \text{(Assoziativität der Multiplikation in } K\text{)} \\
&= \boxed{?} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu \cdot x_n \end{pmatrix} && \text{(Definition der Skalarmultiplikation in } K^n\text{)} \\
&= \lambda \cdot (\mu \cdot x) && \text{(Definition der Skalarmultiplikation in } K^n\text{)}
\end{aligned}$$

Also ist die Skalarmultiplikation auf K^n assoziativ. □

Man schreibt in dieser Situation kurz (und schlampig), dass K^n ein K-Vektorraum ist. Insbesondere erhalten wir auf diese Weise

- eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf den Anschauungsräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$;
- eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf der Menge $\mathbb{R}^n$ von Daten mit n verschiedenen $\mathbb{R}$-wertigen Merkmalen;
- eine $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur auf der Menge ${\mathbb{F}_2}^n$ von Bitvektoren der Länge n. Zum Beispiel kann man die Menge aller Bytes als Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^8$ auffassen.

Auf einen wichtigen Spezialfall sei noch explizit hingewiesen:

Beispiel 2.1.7 (triviale Vektorräume)**.** Sei K ein Körper. Dann ist $K^0 = \{0\}$ ein K-Vektorraum (bezüglich der Addition/Multiplikation aus Proposition 2.1.6); man bezeichnet diesen auch als *Nullvektorraum (über K)*.

Anmerkung zum Lernen (triviale/repräsentative Beispiele)**.** Es ist gut, für alle Situationen passende Beispiele im Kopf zu haben; dabei ist es empfehlenswert, sowohl „triviale“ Beispiele (wie zum Beispiel den Nullvektorraum) als auch Beispiele, die genug Spielraum für „generisches“ Verhalten (wie etwa $\mathbb{R}^3$) bieten, parat zu haben. Solche Beispiele helfen einerseits dabei, Aussagen über abstrakte Begriffe besser zu verstehen, und ermöglichen es andererseits auch, Hypothesen schnell und anschaulich an Beispielen zu überprüfen.

Beispiel 2.1.8 (Körpererweiterungen als Vektorräume)**.** Sei L ein Körper und sei $K \subset L$ ein *Teilkörper*, d.h. $0, 1 \in K$, die Addition und Multiplikation von L schränken sich zu Verknüpfungen auf K ein und K bildet mit der von L eingeschränkten Addition bzw. Multiplikation einen Körper.

Dann bildet L zusammen mit seiner Addition und der auf $K \times L \longrightarrow L$ eingeschränkten Multiplikation einen K-Vektorraum.

Insbesondere ist also $\mathbb{C}$ in kanonischer Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathbb{R}$ ist in kanonischer Weise ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum (!).

Beispiel 2.1.9 (Funktionenräume als Vektorräume)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei X eine (nicht-leere) Menge. Dann ist

$$\mathrm{Abb}(X,V) := \{f \mid f \text{ ist eine Abbildung } X \longrightarrow V\}$$

ein K-Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition bzw. Skalarmultiplikation und der Nullfunktion (nachrechnen!):

$$\begin{aligned} +\colon \mathrm{Abb}(X,V) \times \mathrm{Abb}(X,V) &\longrightarrow \mathrm{Abb}(X,V) \\ (f,g) &\longmapsto \big(x \mapsto f(x) + g(x)\big) \\ \cdot : K \times \mathrm{Abb}(X,V) &\longrightarrow \mathrm{Abb}(X,V) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \big(x \mapsto \lambda \cdot f(x)\big) \end{aligned}$$

Damit verwandte Vektorräume treten in der Analysis auf (Beispiel 2.2.8).

2.1.4 Rechnen in Vektorräumen

Ähnlich zu unserem Vorgehen bei Gruppen und Körpern (Kapitel 1) leiten wir aus den Vektorraumaxiomen erste Folgerungen für das grundlegende Rechnen in Vektorräumen ab. Der Vorzug dieser abstrakten Sichtweise ist wieder, dass alle Aussagen, die wir aus den Vektorraumaxiomen ableiten können, für *alle* Vektorräume gelten (insbesondere auch für die oben genannten Beispiele).

Proposition 2.1.10 (Rechnen in Vektorräumen)**.** *Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.*

1. *Für alle $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot 0 = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf beiden Seiten das neutrale Element der Gruppe $(V,+,0)$.*
2. *Für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf der linken Seite das neutrale Element von $(K,+,0)$ und auf der rechten Seite das neutrale Element von $(V,+,0)$.*
3. *Für alle $\lambda \in K$, $v \in V$ gilt*
$$\lambda \cdot v = 0 \Longrightarrow (\lambda = 0 \vee v = 0).$$
4. *Für alle $\lambda \in K$, $v \in V$ gilt*
$$(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v).$$

Beweis. Der Beweis beruht auf ähnlichen Argumenten wie der Beweis von Proposition 1.3.2. Wir beweisen stellvertretend die dritte Aussage:

Zu 3. Seien $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $\lambda \cdot v = 0$. Ist $\lambda = 0$, so ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass $\lambda \neq 0$ ist. Da $K \setminus \{0\}$ bezüglich

Multiplikation eine Gruppe ist, besitzt λ ein multiplikatives Inverses $\lambda^{-1} \in K$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v && \boxed{?}\ \text{(da 1 bezüglich Skalarmultiplikation neutral ist)} \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v && \boxed{?}\ \text{(da } \lambda^{-1} \text{ multiplikative invers zu } \lambda \text{ ist)} \\ &= \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) && \boxed{?}\ \text{(Assoziativität der Skalarmultiplikation)} \\ &= \lambda^{-1} \cdot 0 && \boxed{?}\ \text{(nach Voraussetzung ist } \lambda \cdot v = 0) \\ &= 0 && \boxed{?}\ \text{(nach dem ersten Teil)} \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

2.2 Untervektorräume

In vielen Situationen ist es vorteilhaft, wenn man sich bei der Betrachtung auf einen kleinen Ausschnitt konzentrieren kann. Im Fall der Vektorräume führt dies zum Begriff des Untervektorraums:

Definition 2.2.1 (Untervektorraum)**.** Sei K ein Körper und sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein K-Vektorraum. Ein *K-Untervektorraum von V* ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildungen $+ \colon V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ schränken sich zu Abbildungen $+ \colon U \times U \longrightarrow U$ und $\cdot : K \times U \longrightarrow U$ ein.
- Es ist $0 \in U$.
- Die Menge U bildet bezüglich dieser eingeschränkten Addition bzw. Skalarmultiplikation und 0 einen K-Vektorraum.

Anmerkung zum Lernen (Unter…)**.** Die Definition von Untervektorräumen folgt einem allgemeinen Prinzip: Im Normalfall erhält man aus der Definition von *Irgendwas* die Definition von *Unter-Irgendwas*, indem man eine geeignete Teilmenge betrachtet und verlangt, dass sich die Struktur des großen Irgendwas auf diese Teilmenge einschränkt und die Teilmenge mit dieser eingeschränkten Struktur die Bedingungen der Definition von Irgendwas erfüllt. Auf diese Weise erhält man auch den Begriff Untergruppe, Untermodul, Untermannigfaltigkeit, Teilkörper, Teilraum (im Sinne der Topologie), …

Beispiel 2.2.2 (triviale Untervektorräume)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann gibt es immer die folgenden K-Untervektorräume von V:

- klein? $\{0\} \subset V$;
- groß? $V \subset V$.

In der Praxis, ist es manchmal besser, die obigen Definition durch das folgende Kriterium zu ersetzen:

Proposition 2.2.3 (Charakterisierung von Unterräumen). *Sei K ein Körper, sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein K-Vektorraum und sei $U \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge. Dann ist U genau dann ein K-Untervektorraum von V, wenn folgende Bedingungen beide erfüllt sind:*

① *Für alle $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$.*

② *Für alle $\lambda \in K$ und alle $u \in U$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.*

Beweis. Ist U ein K-Untervektorraum von V, so sind die beiden Bedingungen nach Definition erfüllt.

Es erfülle umgekehrt $U \subset V$ die beiden obigen Bedingungen. Dann ist U ein K-Untervektorraum von V, denn: Da die beiden Bedingungen ① und ② erfüllt sind, schränken sich Addition bzw. Skalarmultiplikation zu entsprechenden Verknüpfungen auf U ein.

1. Es ist $0 \in U$, denn: Wegen $U \neq \emptyset$ gibt es ein $u \in U$. Aufgrund von Proposition 2.1.10 (angewendet auf V) und ② gilt
$$0 = 0 \cdot u \in U.$$
2. Es ist U eine abelsche Gruppe bezüglich der eingeschränkten Addition, denn:
   - Da 0 in $(V, +, 0)$ neutral ist, ist 0 insbesondere auch in $(U, +, 0)$ neutral. Man beachte dabei, dass 0 nach dem ersten Schritt tatsächlich in U liegt!
   - Ist $v \in U$, so ist $-v = (-1) \cdot v$ nach Proposition 2.1.10 und ② in U. Da U die von V eingeschränkte Addition trägt, ist $-v$ auch in $(U, +, 0)$ das Inverse von v.
   - Die Addition auf U ist assoziativ, da sie die Einschränkung der assoziativen Addition auf V ist.
3. Die Assoziativität und Neutralität der Skalarmultiplikation bzw. die Distributivität vererben sich aufgrund der eingeschränkten Verknüpfungen von V auf U.

Also ist U ein K-Untervektorraum von V. □

Beispiel 2.2.4 (Geraden). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $v \in V$. Dann ist
$$K \cdot v := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in K\} \subset V$$
ein K-Untervektorraum von V (nachrechnen!). Ist $v \neq 0$, so bezeichnet man diesen Untervektorraum als die *von v aufgespannte Gerade in V*. Man beachte dabei, dass $0 \in K \cdot v$ ist; im Anschauungsraum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ handelt es sich

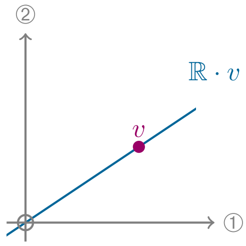


Abbildung 2.3.: Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$

dabei also um sogenannte Ursprungsgeraden (Abbildung 2.3). Ist $v = 0$, so ist $K \cdot v = \{0\}$ (Proposition 2.1.10).

In der Geometrie und anderen Anwendungen möchte man sich oft nicht auf Ursprungsgeraden/-ebenen etc. einschränken. Man führt daher entsprechend verschobene, affine, Begriffe ein:

Definition 2.2.5 (affiner Unterraum)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ ist ein *affiner K-Unterraum von V*, wenn es ein $w \in V$ gibt, so dass

$$w + U := \{w + u \mid u \in U\} \subset V$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

Beispiel 2.2.6 (affine Geraden)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v, w \in V$. Dann ist

$$w + K \cdot v = \{w + \lambda \cdot v \mid \lambda \in K\} \subset V$$

ein affiner K-Unterraum von V (Abbildung 2.4). Ist $v \neq 0$, so bezeichnet man diesen Unterraum auch als die *von v in w aufgespannte affine Gerade in V*. Man beachte dabei, dass $w \in w + K \cdot v$ ist. Ist $v = 0$, so ist $w + K \cdot v = \{w\}$.

Beispiel 2.2.7 (SET)**.** Fragen über das Spiel SET[1] kann man in Fragen über affine Geraden in dem Vektorraum ${\mathbb{F}_3}^4$ über dem Körper $\mathbb{F}_3$ übersetzen [7, Kapitel 1.6.2][1].

Beispiel 2.2.8 (Funktionenräume in der Analysis)**.** Wir betrachten $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und den zugehörigen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann sind

- die Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

[1] SET ist eine Trademark von SET Enterprises, Inc.

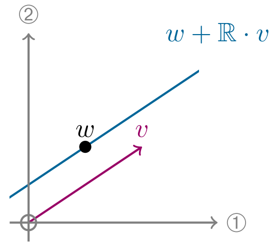


Abbildung 2.4.: Eine affine Gerade in $\mathbb{R}^2$

- die Menge der differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- die Menge der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- ...

$\mathbb{R}$-Untervektorräume von $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Der Beweis verwendet dabei jeweils (analytische) Eigenschaften der entsprechenden Sorte von Funktionen und das Kriterium aus Proposition 2.2.3.

Proposition 2.2.9 (Durchschnitt von Untervektorräumen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ Untervektorräume von V. Dann ist auch $U \cap W$ ein K-Untervektorraum von V.*

Allgemeiner gilt: Ist $Z \subset P(V)$ eine nicht-leere Menge von K-Untervektorräumen von V, so ist auch der Durchschnitt $\bigcap Z = \{v \mid \forall_{U \in Z} \quad v \in U\}$ ein K-Untervektorraum von V.

Beweis. Dies folgt, indem man nachweist, dass der Durchschnitt die Bedingungen aus Proposition 2.2.3 erfüllt (nachrechnen); man beachte dabei, dass der Durchschnitt nicht-leer ist, da jeder Untervektorraum von V den Nullvektor 0 enthält. □

Caveat 2.2.10 (Vereinigung von Untervektorräumen)**.** Die Vereinigung von Untervektorräumen ist im allgemeinen *kein* Untervektorraum! Zum Beispiel ist das Koordinatenkreuz

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \cdot x_2 = 0 \right\}$$

in $\mathbb{R}^2$ *kein* $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, denn diese Menge ist *nicht* bezüglich Addition abgeschlossen.

2.3 Konstruktionen

Wir stellen kurz drei Standardkonstruktionen von Vektorräumen vor: Direkte Summen, direkte Produkte und Quotienten. Für uns wird im folgenden im wesentlichen nur die direkte Summe zweier Vektorräume relevant werden.

2.3.1 Direkte Summen

Sei K ein Körper. Sind V und W Vektorräume über K, so bildet

$$\begin{aligned} V \oplus W := \bigl(\, & V \times W, \\ & \text{komponentenweise Addition}, \\ & \text{komponentenweise Skalarmultiplikation}, \\ & (0,0)\bigr) \end{aligned}$$

einen K-Vektorraum (nachrechnen): die *direkte Summe von V und W*.

Ausblick 2.3.1 (allgemeine direkte Summe)**.** Sei K ein Körper, sei I eine Menge und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine über I indizierte Familie von K-Vektorräumen. Dann bildet

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} V_i := \Bigl(& \Bigl\{ v \in \prod_{i\in I} V_i \Bigm| \exists_{J\subset I} \quad \bigl((\#J < \infty) \land (\forall_{i\in I\setminus J} \quad v_i = 0)\bigr) \Bigr\}, \\ & \text{komponentenweise Addition}, \\ & \text{komponentenweise Skalarmultiplikation}, \\ & \text{Nullfunktion} \Bigr) \end{aligned}$$

einen K-Vektorraum (nachrechnen): die *direkte Summe der* $(V_i)_{i\in I}$.

Dabei ist $\prod_{i\in I} V_i$ die Menge aller Familien $(v_i)_{i\in I}$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in I$. Formal konstruiert man solche Produkte als die Menge

$$\prod_{i\in I} V_i := \Bigl\{ v \in \operatorname{Abb}\Bigl(I, \bigcup_{i\in I} V_i\Bigr) \Bigm| \forall_{i\in I} \quad v(i) \in V_i \Bigr\}.$$

Der Vektorraum $\bigoplus_{i\in I} V_i$ besteht also nur aus den Familien, bei denen jeweils nur endlich viele Einträge von 0 verschieden sind.

2.3.2 Direkte Produkte*

Sei K ein Körper, sei I eine Menge und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine über I indizierte Familie von K-Vektorräumen. Dann bildet

$$\prod_{i\in I} V_i := \Big(\prod_{i\in I} V_i, \\ \text{komponentenweise Addition}, \\ \text{komponentenweise Skalarmultiplikation}, \\ \text{Nullfunktion}\Big)$$

einen K-Vektorraum (nachrechnen): das *direkte Produkt der* $(V_i)_{i\in I}$.

Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$ ist ein K-Untervektorraum von $\prod_{i\in I} V_i$ (nachrechnen). Ist X eine nicht-leere Menge und V ein K-Vektorraum, so ist $\prod_X V = \operatorname{Abb}(X, V)$.

2.3.3 Quotienten*

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum von V. Dann ist

$$\sim_U := \big\{(v, w) \in V \times V \bigm| v - w \in U\big\}$$

eine Äquivalenzrelation auf V (nachrechnen!). Dann bildet

$$V/U := \big(V/{\sim_U}, \\ \text{repräsentantenweise Addition}, \\ \text{repräsentantenweise Skalarmultiplikation}, \\ [0]_{\sim_U}\big)$$

einen K-Vektorraum (nachrechnen), den *Quotientenvektorraum* V *modulo* U.

- *Algebraische Motivation:* Der Quotientenvektorraum V/U ist der Vektorraum, den man erhält, wenn man in V alles „vergisst“, was in U passiert.

- *Geometrische Motivation:* Der Quotientenvektorraum V/U ist der Vektorraum, den man erhält, wenn man alle zu U „parallelen“ affinen Unterräume von V betrachtet (Abbildung 2.5). Genauer: Ist $v \in V$, so ist $[v]_{\sim_U} = v + U$ (nachrechnen!).

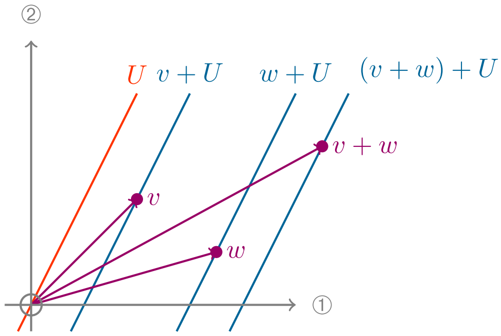


Abbildung 2.5.: Quotientenvektorraum, schematisch

2.4 Anwendung*: Modellierung in Koordinaten

Wir fassen noch einmal kurz typische Situationen in der Informatik/Data Science zusammen, in denen Vektorräume in natürlicher Weise auftreten:

- Beschreibung von 2D- bzw. 3D-Objekten in kartesischen Koordinaten: Durch die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

  Die Vektorraumaddition bzw. Skalarmultiplikation entsprechen der geometrischen Translation bzw. Skalierung.

- Beschreibung von Bitvektoren der Länge n: Durch den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^n$.

  Die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{F}_2$-Vektorräumen ist nicht sehr aussagekräftig (da $\mathbb{F}_2$ zu wenige Elemente enthält). Je nach Interpretation der Elemente von $\mathbb{F}_2$ als Binärziffern oder Wahrheitswerte ergeben sich für die Vektorraumaddition auf ${\mathbb{F}_2}^n$ entsprechende Interpretationen.

- Beschreibung von Daten mit n reellwertigen Merkmalen: Durch den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Die Koordinaten spiegeln dabei die einzelnen Merkmale wider.

  Hierbei ergeben die Operationen aus der Vektorraumstruktur zunächst im allgemeinen *keinen* Sinn auf den Datenpunkten. Aber bei der Anwendung analytischer Methoden auf solchen Datenmengen wird die Vektorraumstruktur relevant.

  Je nachdem wieviele Merkmale betrachtet werden und wie „dünn" die Datenpunkte in $\mathbb{R}^n$ liegen, bietet es sich dabei an, die Datenpunkte *nicht* naiv als Arrays, sondern als „dünnere" Vektorstrukturen zu implementieren.

3

Lineare Gleichungssysteme

Viele geometrische Sachverhalte oder einfache physikalische, analytische bzw. informationstechnische Abhängigkeiten lassen sich als Lösungen linearer Gleichungssysteme beschreiben.

Lineare Gleichungssysteme lassen sich elegant mithilfe der Sprache der Matrizen formulieren und manipulieren. Daher werden wir zunächst diese Sprache einführen. Im Anschluss stellen wir erste allgemeine Überlegungen zur Struktur von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme an.

In Kapitel 4 entwickeln wir mehr Theorie zu Vektorräumen, um Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme geschickt beschreiben zu können. Ein klassischer Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist das Gaußsche Eliminationsverfahren; dieses betrachten wir in Kapitel 5.

Überblick über dieses Kapitel.

3.1 Was sind lineare Gleichungssysteme?

Lineare Gleichungssysteme sind Systeme von Gleichungen, in denen alle Variablen nur „linear“ auftreten.

Beispiel 3.1.1 (lineares Gleichungssystem)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $a_{11}, \dots, a_{1n},\ a_{21}, \dots, a_{mn} \in K$ und seien $b_1, \dots, b_m \in K$. Dann ist folgendes eine lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen:

Gesucht: alle $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.2 (kein lineares Gleichungssystem)**.** Die folgenden Gleichungssysteme sind *nicht* linear:

Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 42$

Gesucht: alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 2023$

Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x + \log x = \sqrt{x}$

Um lineare Gleichungssysteme notationell und rechnerisch effizient handhaben zu können, führt man Matrizen und geeignete Rechenoperationen auf Matrizen ein.

3.2 Matrizen

Matrizen sind „rechteckige“ Schemata von „Zahlen“. Addition und Skalarmultiplikation werden komponentenweise definiert. Die Matrixmultiplikation ist so angelegt, dass sie lineare Gleichungssysteme gut beschreibt und ist daher *nicht* komponentenweise definiert.

3.2.1 Der Vektorraum der Matrizen

Definition 3.2.1 (Matrix)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

- Eine $m \times n$-*Matrix über* K ist eine $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$-indizierte Familie $(a_{jk})_{j,k}$ in K:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Die Konvention ist, in der ersten Koordinate die Zeilen (oben beginnend) und in der zweiten Koordinate die Spalten (links beginnend) zu indizieren.

- Wir bezeichnen die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K mit $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

- Ist $A = (a_{jk})_{j.k} \in M_{m\times n}(K)$ und ist $j \in \{1,\dots,m\}$, so schreiben wir

$$A_{j*} := (a_{j1},\dots,a_{jn}) \in M_{1\times n}(K)$$

  für die j-*te Zeile von* A. Analog schreiben wir für $k \in \{1,\dots,n\}$

$$A_{*k} := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(K)$$

  für die k-*te Spalte von* A.

- Wir identifizieren dabei $\mathrm{M}_{m\times 1}(K)$ mit K^m und $\mathrm{M}_{1\times 1}(K)$ mit K.

Caveat 3.2.2. Verschiedene Programmiersprachen verwenden verschiedene Konventionen, wenn Matrizen als doppelt-indizierte Arrays umgesetzt werden: In manchen ist der erste Index der Zeilenindex, in manchen der Spaltenindex. Außerdem bietet es sich in manchen Anwendungen an, Matrizen als Arrays von Listen oder als Hash-Tabellen zu implementieren.

Beispiel 3.2.3 (Einheitsmatrix)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

die $n \times n$-*Einheitsmatrix über* K. Mithilfe des *Kronecker-Deltas*

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

lässt sich die Einheitsmatrix kurz als $I_n = (\delta_{j,k})_{j,k} \in M_{n\times n}(K)$ schreiben.

Beispiel 3.2.4 (Sudoku)**.** Vollständig gelöste Sudoku-Puzzles können als Matrizen in $\mathrm{M}_{9\times 9}(\mathbb{Q})$ angesehen werden. Auch viele weitere Puzzles und Rätsel mit Zahlen in rechteckigen Gittern können in der Sprache der Matrizen formuliert (und manche sogar auch gelöst) werden.

Bemerkung 3.2.5 (der Vektorraum der Matrizen)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann bildet $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ bezüglich der folgenden Addition, Skalarmultiplikation und der $m \times n$-Nullmatrix einen K-Vektorraum (nachrechnen!):

$$\begin{aligned} +\colon \mathrm{M}_{m\times n}(K) \times \mathrm{M}_{m\times n}(K) &\longrightarrow \mathrm{M}_{m\times n}(K) \\ \bigl(A = (a_{jk})_{j,k}, B = (b_{jk})_{jk}\bigr) &\longmapsto A + B := (a_{jk} + b_{jk})_{j,k} \\ \cdot : K \times \mathrm{M}_{m\times n}(K) &\longrightarrow \mathrm{M}_{m\times n}(K) \\ \bigl(\lambda, A = (a_{jk})_{j,k}\bigr) &\longmapsto \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{jk})_{j,k} \end{aligned}$$

In $\mathrm{M}_{m\times 1}(K)$ stimmen diese Addition und Skalarmultiplikation mit der gewöhnlichen Vektorraumstruktur auf K^m überein.

Caveat 3.2.6. Matrizen unterschiedlicher Größe oder über inkompatiblen Grundkörpern können *nicht* addiert werden!

Definition 3.2.7 (transponierte Matrix)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A = (a_{jk})_{j,k} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann ist die *transponierte Matrix* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *von* A durch „Spiegelung an der Diagonalen" definiert:

$$A^\top := (a_{jk})_{k,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Durch das Transponieren werden also Zeilen zu Spalten und umgekehrt; insbesondere vertauschen sich auch die Anzahlen der Zeilen bzw. Spalten.

Beispiel 3.2.8. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top\right)^\top = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Diese Notation ist mit der Transpositionsnotation von Spaltenvektoren (Definition 2.1.1) kompatibel.

3.2.2 Matrixmultiplikation

Definition 3.2.9 (Matrixmultiplikation)**.** Sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$.

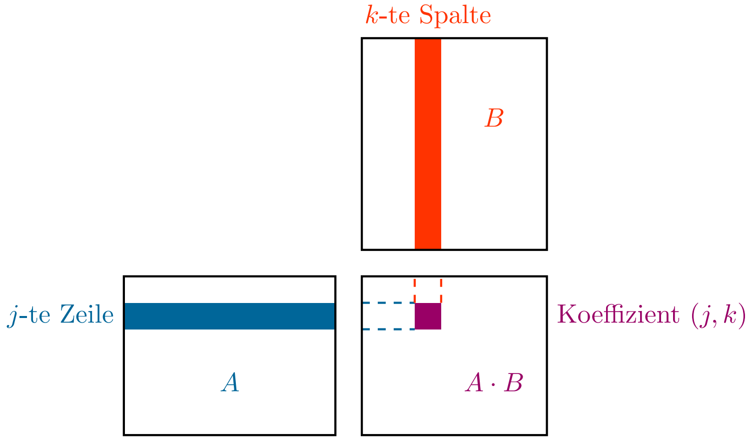


Abbildung 3.1.: Multiplikation von Matrizen, schematisch

Abbildung 3.2.: Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte, schematisch

- Sind $A = (a_{1j})_j \in \mathrm{M}_{1\times n}(K)$ und $B = (b_{j1})_j \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$, so definieren wir
$$A \cdot B := \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j1} \in K = \mathrm{M}_{1\times 1}(K).$$
- Sind $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(K)$, so definieren wir
$$A \cdot B := (A_{j*} \cdot B_{*k})_{j,k} \in M_{m\times p}(K).$$

Wie kann man sich diesen Zahlensalat merken? Eine bewährte Methode ist, sich die zu multiplizierenden Matrizen wie in Abbildung 3.1 aufzuschreiben und die Multiplikation so wie dort angedeutet zu berechnen. Dabei werden einzelne Zeilen mit Spalten wie im Zeilen/Spalten-Krokodil (Abbildung 3.2) miteinander multipliziert.

Caveat 3.2.10. Matrizen können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn ihre Größen wie in der Definition angegeben zusammenpassen. Insbesondere ergibt das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen wieder eine $n \times n$-Matrix!

Beispiel 3.2.11 (Extraktion von Spalten/Zeilen durch Matrixmultiplikation)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}$. Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$A \cdot e_k = A_{*k},$$

wobei $e_k := (\delta_{jk})^\top_{j\in\{1,\dots,n\}} \in K^n$ der k-te *Standardeinheitsvektor* von K^n ist (nachrechnen!). Analog kann man Zeilen extrahieren, indem man von links mit den entsprechenden Standardeinheitszeilenvektoren multipliziert.

Caveat 3.2.12. Matrixmultiplikation ist im allgemeinen *nicht* kommutativ! Dass dies noch nicht einmal für quadratische Matrizen gilt, zeigt das folgende Beispiel: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.13 (grundlegende Eigenschaften der Matrixmultiplikation)**.** *Sei K ein Körper und seien $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.*

0. Multiplikation mit der Nullmatrix. *Für alle $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ gilt (wobei 0 jeweils eine passende Nullmatrix bezeichnet)*

$$A \cdot 0 = 0 \quad \textit{und} \quad 0 \cdot A = 0.$$

1. Neutralität der Einheitsmatrizen. *Für alle $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ gilt*

$$A \cdot I_n = A \quad \textit{und} \quad I_m \cdot A = A.$$

2. Distributivität. *Für alle $A, A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und alle $B, B' \in \mathrm{M}_{n\times p}(K)$ gilt*

$$(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B \quad \textit{und} \quad A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'.$$

3. Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation. *Für alle $\lambda \in K$ und alle $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(K)$ gilt*

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B).$$

4. Assoziativität. *Für alle $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{p\times q}(K)$ gilt*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Beweis. Zu 0. Dies folgt direkt aus der Definition der Matrixmultiplikation.

Zu 1. Dies folgt aus der Definition der Matrixmultiplikation und Beispiel 3.2.11. Man beachte dabei, dass die Spalten der Einheitsmatrix genau die Standardeinheitsvektoren (in der richtigen Reihenfolge) sind.

Zu 2. Wir rechnen die Distributivität koeffizientenweise nach: Seien $r \in \{1, \dots, m\}$ und $s \in \{1, \dots, p\}$. Dann gilt nach Definition der Matrixoperationen

$$\begin{aligned}
\bigl((A + A') \cdot B\bigr)_{r,s} &= (A + A')_{r*} \cdot B_{*s} = \sum_{j=1}^{n} (A + A')_{r,j} \cdot B_{j,s} \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{r,j} \cdot B_{j,s} + \sum_{j=1}^{n} A'_{r,j} \cdot B_{j,s} \\
&= (A \cdot B)_{r,s} + (A' \cdot B)_{r,s} \\
&= (A \cdot B + A' \cdot B)_{r,s}.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die zweite Distributivitätsgleichung.

Zu 3. Ähnlich wie im zweiten Fall (aber etwas einfacher) kann man die Behauptung koeffizientenweise nachrechnen.

Zu 4. Auch diese Behauptung zeigen wir koeffizientenweise: Seien $r \in \{1, \dots, m\}$ und $s \in \{1, \dots, q\}$. Dann gilt nach Definition der Matrixmultiplikation und nach Umordnung der beteiligten endlichen Summen, dass

$$\begin{aligned}
\bigl((A \cdot B) \cdot C\bigr)_{r,s} &= \sum_{j=1}^{p} (A \cdot B)_{r,j} \cdot C_{j,s} && (\text{Multiplikation } \dots \cdot C) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} A_{r,k} \cdot B_{k,j}\Bigr) \cdot C_{j,s} && (\text{Multiplikation } A \cdot B) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} \cdot B_{k,j} \cdot C_{j,s} && (\text{Distributivität in } K) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} \cdot \sum_{j=1}^{p} B_{k,j} \cdot C_{j,s} && (\text{Umordnen, Distr. in } K) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} \cdot (B \cdot C)_{k,s} && (\text{Multiplikation } B \cdot C) \\
&= \bigl(A \cdot (B \cdot C)\bigr)_{r,s}. && (\text{Multiplikation } A \cdot \dots)
\end{aligned}$$

Also ist Matrixmultiplikation assoziativ. □

Anmerkung zum Lernen. Verfolgen Sie den Verlauf der Indizes nochmal genau in einer geeigneten schematischen Skizze von Matrizen.

Anmerkung zum Lernen. Das Rechnen mit Matrizen sollte unbedingt von Hand geübt werden, damit man ein Gespür dafür bekommt. Es bietet sich jedoch an, die Ergebnisse mit einem Computeralgebrasystem zu überprüfen.

3.2.3 Invertierbare Matrizen

Definition 3.2.14 (invertierbare Matrix)**.** Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit

$$A \cdot B = I_n \quad \text{und} \quad B \cdot A = I_n$$

gibt. Man bezeichnet B dann als *inverse Matrix* von A.

Beispiel 3.2.15.

- Die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
ist invertierbar, denn
$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
erfüllt (nachrechnen!) $A \cdot B = I_2$ und $B \cdot A = I_2$.

- Die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
ist *nicht* invertierbar, denn: *Angenommen*, es gäbe eine inverse Matrix $B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ von A. Dann folgt (Beispiel 3.2.11 !)
$$e_1 = (I_2)_{*1} = (B \cdot A)_{*1} = B \cdot A \cdot e_1 = B \cdot A_{*1} = B \cdot e_1 = B_{*1}$$
und analog
$$e_2 = (I_2)_{*2} = (B \cdot A)_{*2} = B \cdot A \cdot e_2 = B \cdot A_{*2} = B \cdot e_1 = B_{*1}.$$
Somit erhalten wir $e_1 = B_{*1} = e_2$, was nicht sein kann. Also ist A *nicht* invertierbar.

Ausblick 3.2.16 (die allgemeine lineare Gruppe)**.** Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet

$$\mathrm{GL}_n(K) := \bigl\{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \bigm| A \text{ ist invertierbar}\bigr\} \subset \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation mit neutralem Element I_n; dies folgt aus den Eigenschaften in Proposition 3.2.13 und der Definition von Invertierbarkeit (nachrechnen!). Insbesondere erhalten wir daraus, dass inverse Matrizen (wenn sie existieren) eindeutig bestimmt sind (Proposition 1.2.5).

3.3 Lineare Gleichungssysteme via Matrizen

Mithilfe von Matrizen und der Matrixmultiplikation können wir lineare Gleichungssysteme kurz und knapp notieren:

Definition 3.3.1 (lineares Gleichungssystem)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$. Dann ist

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b$

das *lineare Gleichungssystem zu A und b*. Man sagt, dass dieses lineare Gleichungssystem aus *m Gleichungen* in *n Variablen* besteht, denn explizit ausgeschrieben lautet das obige System:

Gesucht: alle $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$V(A, b) := \{x \in K^n \mid A \cdot x = b\} \subset K^n.$$

Man bezeichnet

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = 0$

als *zugehöriges homogenes Gleichungssystem* und die Elemente von $V(A, 0)$ als *homogene Lösungen*.

Beispiel 3.3.2. Lineare Gleichungssysteme treten oft in der Geometrie von Geraden, Ebenen, ... in kartesischen Koordinaten auf; außerdem können manche Mischungsprobleme etc. durch lineare Gleichungssysteme ausgedrückt werden (Übungsaufgabe).

Beispiel 3.3.3. In Kombination mit algebraischen Lösungsstrategien wird das folgende „triviale“ Beispiel relevant: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^n$, so ist

$$V(I_n, b) = \boxed{?} \quad \{x \in K^n \mid I_n \cdot x = b\} = \{x \in K^n \mid x = b\} = \{b\}.$$

Proposition 3.3.4 (Struktur von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem*

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b$

zu A und b.

1. *Die Lösungsmenge $V(A, 0)$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum von K^n.*

2. *Ist x_0 eine Lösung des linearen Gleichungssystems*

   Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b$

   (also eine sogenannte spezielle Lösung*), so gilt*

   $$V(A, b) = x_0 + V(A, 0).$$

   Insbesondere ist $V(A, b)$ ein affiner Unterraum von K^n.

Beweis. Zu 1. Wir verwenden die Charakterisierung von Untervektorräumen aus Proposition 2.2.3.

- Es ist $V(A, 0) \neq \emptyset$, denn $0 \in K^n$ erfüllt $A \cdot 0 = 0$.
- Seien $x, y \in V(A, 0)$. Dann ist $x + y \in V(A, 0)$, denn:

  $$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0 + 0 = 0.$$

- Sei $x \in V(A, 0)$ und $\lambda \in K$. Dann ist $\lambda \cdot x \in V(A, 0)$, denn:

  $$A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Also ist $V(A, 0)$ ein K-Untervektorraum von K^n.

Zu 2. Sei $x_0 \in K^n$ eine spezielle Lösung. Ist $x \in V(A, b)$, so ist $x - x_0 \in V(A, 0)$, denn

$$A \cdot (x - x_0) = A \cdot x - A \cdot x_0 = b - b = 0.$$

Ist umgekehrt $x \in V(A, 0)$, so ist $x_0 + x \in V(A, b)$, denn

$$A \cdot (x_0 + x) = A \cdot x_0 + A \cdot x = b + 0 = b.$$

Also ist $V(A, b) = x_0 + V(A, 0)$. □

Proposition 3.3.5 (lineare Gleichungssysteme und invertierbare Transformationen)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und sei $b \in K^m$.*

1. *Ist $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ invertierbar, so ist*

$$V(A,b) = V(S\cdot A, S\cdot b).$$

2. *Insbesondere: Ist $m = n$ und A invertierbar, so folgt*

$$V(A,b) = \{A^{-1}\cdot b\}.$$

Beweis. Zu 1. Sei $x \in K^n$. Wir zeigen die beiden Inklusionen einzeln:

- Sei $x \in V(A,b)$. Wegen $A\cdot x = b$ erhalten wir mit den Eigenschaften der Matrixmultiplikation, dass

  $$S\cdot A\cdot x = S\cdot b.$$

  Also ist $x \in V(S\cdot A, S\cdot b)$.

- Ist umgekehrt $x \in V(S\cdot A, S\cdot b)$, so ist $S\cdot A\cdot x = S\cdot b$, und mit der Invertierbarkeit von S folgt

  $$A\cdot x = I_n\cdot A\cdot x = S^{-1}\cdot S\cdot A\cdot x = S^{-1}\cdot S\cdot b = I_n\cdot b = b.$$

  Also ist $x \in V(A,b)$.

Zu 2. Wir wenden den ersten Teil auf $S = A^{-1}$ an und erhalten mit Beispiel 3.3.3, dass

$$V(A,b) = V(A^{-1}\cdot A, A^{-1}\cdot b) = V(I_n, A^{-1}\cdot b) = \{A^{-1}\cdot b\},$$

wie gewünscht. □

Beispiel 3.3.6. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Da A invertierbar ist (Beispiel 3.2.15), erhalten wir mit Proposition 3.3.5 für das inhomogene lineare Gleichungssystem

Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $A\cdot x = b$

bzw. expliziter ?

Gesucht: alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2\cdot x_2 &= 2 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge

$$V(A,b) = \boxed{?} \quad \{A^{-1}\cdot b\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Nach diesen eher theoretischen Betrachtungen stellen sich die folgenden Fragen:

- Wie gibt man Lösungen zu linearen Gleichungssystemen an? Da die Lösungsmengen von homogenen linearen Gleichungssystemen Vektorräume sind, benötigen wir eine gute Beschreibung solcher (Unter-)-Vektorräume – sowohl für die „Größe" als auch für die konkreten Elemente. Wir werden daher in Kapitel 4 genauer auf den Begriff der Dimension und auf Basen von Vektorräumen eingehen.

- Wie kann man die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen in der Praxis allgemein bestimmen? In Kapitel 5 werden wir die Lösungen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren systematisch bestimmen.

3.4 Anwendung*: Error-correcting Codes

Wir gehen kurz auf eine Anwendung aus der Codierungstheorie ein. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen sind ein wesentliches Hilfsmittel bei sogenannten linearen Codes [9, Kapitel 5]:

Die grundlegende Idee von Error-correcting Codes in der Nachrichtenübermittlung/-archivierung ist wie folgt:

- Der Sender ergänzt die eigentliche Information/Nachricht um zusätzliche Zeichen (die aus der ursprünglichen Information/Nachricht berechnet werden).

- Der Sender übermittelt diese ergänzte Version.

- Der Empfänger überprüft, ob die ergänzte Version konsistent ist. Wenn nicht, versucht er mithilfe der ursprünglichen und ergänzten Informationen die ursprüngliche Information/Nachricht so gut wie möglich zu rekonstruieren.

Beispiele solcher Verfahren sind Prüfziffern bei Barcodes, Redundanzen bei der Übertragung und dem Abspielen von Audio- oder Videodaten, allgemeine Nachrichtenübermittlung, RAID-Systeme, etc.. Die Verfahren sollten dabei so konzipiert sein, dass die Zusatzinformation leicht zu berechnen ist, nicht viel Platz benötigt und dennoch die Möglichkeit bietet, möglichst viele Fehler zu korrigieren.

Caveat 3.4.1. Die im folgenden verwendeten Begriffe „Code", „codieren" „decodieren" haben nichts mit Verschlüsselung zu tun, sondern beschreiben allgemeinere Operationen auf Zeichenketten.

Definition 3.4.2 ((linearer) Code)**.** Sei K ein *Alphabet* (d.h. eine endliche Menge) und sei $n \in \mathbb{N}$.

- Ein *Code der Länge n über K* ist eine Teilmenge von K^n.
- Ist K ein Körper, so bezeichnet man Codes der Länge n, die die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems über K bilden, als *lineare Codes*.

Beispiel 3.4.3 (Hamming-Code). Der *Hamming-Code* ist $V(P,0) \subset {\mathbb{F}_2}^7$, wobei

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 7}(\mathbb{F}_2).$$

Die Matrix P nennt man die *Prüfmatrix* des Hamming-Codes.

Um das Hamming-Verfahren zu erklären, benötigen wir außerdem die Erzeugermatrix

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 7}(\mathbb{F}_2).$$

Das Verfahren funktioniert wie folgt:

- Gegeben sei eine Nachricht $x \in {\mathbb{F}_2}^4$, d.h. ein Bitvektor der Länge 4.
- Der Sender berechnet $y := G^\top \cdot x \in {\mathbb{F}_2}^7$ und sendet y (ein Bitvektor der Länge 7 statt 4; die ersten vier Bits stimmen dabei mit x überein, die restlichen drei Bits sind „Prüfbits").
- Der Empfänger empfängt $y' \in {\mathbb{F}_2}^7$.

  Wenn es bei der Übertragung bei höchstens einem Bit einen Fehler gab, gilt:
  $$(y' = y) \vee \bigl(\exists_{j\in\{1,\dots,7\}} \quad y' = y + e_j\bigr).$$
  Wie können wir herausfinden, welcher dieser Fälle eingetreten ist? Wir berechnen $P \cdot y'$. Man sieht dann (nachrechnen durch eine Fallunterscheidung):

  - Ist $P \cdot y' = 0$, so ist $y' = y$.
  - Ist $P \cdot y'$ die j-te Spalte von P, so ist $y' = y + e_j$. Man beachte dabei, dass die Spalten von P alle verschieden sind.

  Unter der Annahme, dass es bei der Übertragung höchstens einen Fehler gab, kann der Empfänger also festellen, ob ein Fehler vorlag und wenn ja, an welcher Stelle (diese Stelle kann auch bei den Prüfbits liegen!).

In diesem Sinne „korrigiert der Hamming-Code auf Bitvektoren der Länge 4 bis zu einen Fehler".

Diese Konstruktion des Hamming-Codes kann auf längere Bitvektoren verallgemeinert werden [9, Kapitel 5].

4

Basen und Dimension

Wir entwickeln die Sprache und Theorie, um Antworten auf die folgenden Fragen geben zu können:

- Wie kann man (Unter-)Vektorräume gut beschreiben?
- Wie kann man die „Größe“ von (Unter-)Vektorräumen beschreiben?

In beiden Fällen ist der Begriff der Basis zentral. Basen sind „kleinste“ Erzeugendensysteme von Vektorräumen. Es stellt sich heraus, dass je zwei Basen desselben Vektorraums dieselbe Länge besitzen. Dies ermöglicht eine mathematisch präzise und robuste Definition der Dimension eines Vektorraums. Diese Definition entspricht dabei der Anschauung, dass die Dimension eines Vektorraums die „Anzahl der voneinander unabhängigen Richtungen“ ist.

Die in diesem Kapitel entwickelte Theorie ist bei der Lösung linearer Gleichungssysteme hilfreich; dies werden wir im folgenden Kapitel 5 behandeln. Außerdem werden wir in Kapitel 5 sehen wie man die hier eingeführten Begriffe algorithmisch behandeln kann.

Überblick über dieses Kapitel.

4.1 Linearkombinationen

Um sinnvoll über Erzeugendensysteme und lineare Relationen zwischen Vektoren sprechen zu können, führen wir den Begriff der Linearkombination ein. Das Konzept des Vektorraums ist genau so gewählt, dass Linearkombinationen gebildet werden können. Der Einfachheit halber werden wir uns im folgenden immer auf endliche Familien beschränken; die Theorie kann auf den Fall unendlicher Familien erweitert werden, indem man jeweils endliche Teilfamilien betrachtet [5].

Definition 4.1.1 (Familie)**.** Seien X und I Mengen. Eine *(über I indizierte) Familie $(x_i)_{i\in I}$ in X* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie in X, so ist eine *Teilfamilie von $(x_i)_{i\in I}$* eine Familie der Form $(x_j)_{j\in J}$, wobei $J \subset I$ eine Teilmenge von I ist. Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ ist *endlich*, wenn I endlich ist.

Man beachte, dass über $\mathbb{N}$ indizierte Familien dasselbe wie Folgen sind.

Bemerkung 4.1.2 ((Teil)Mengen vs. Familien)**.** Seien X und I Mengen und sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie in X. Im Unterschied zur Menge $\{x_i \mid i \in I\} \subset X$ können in der Familie $(x_i)_{i\in I}$ Elemente aus X mehrfach auftreten und bei $(x_i)_{i\in I}$ ist auch die „Reihenfolge“ der Elemente relevant (d.h. welches Element zu welchem Index aus I gehört).

Zum Beispiel sind die drei-elementigen Familien $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ in $\mathbb{R}$ paarweise verschieden, aber die zugehörigen Mengen sind alle gleich ? $\{0,1\}$ (Extensionalität der Mengengleichheit).

Definition 4.1.3 (Linearkombination)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V. Eine *Linearkombination der $(v_i)_{i\in I}$* ist eine Summe der Form

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i,$$

wobei $(\lambda_i)_{i\in I}$ eine Familie (sogenannter *Koeffizienten*) in K ist. Man beachte dabei, dass diese Summe tatsächlich einen wohldefinierten Wert in V liefert (dies folgt induktiv über $\#I$, da die Addition in V assoziativ und kommutativ ist).

4.2 Erzeugendensysteme

Da es umständlich ist, Untervektorräume zu spezifizieren, indem man die Menge aller Elemente angibt, führt man den Begriff des Erzeugendensystems ein. Eine Familie bzw. Menge von Vektoren in einem Vektorraum bildet ein Erzeugendensystem dieses Vektorraums, wenn sich jeder Vektor des Vektorraums als Linearkombination der gegebenen Familie bzw. Menge schreiben lässt:

Definition 4.2.1 (Erzeugendensystem, erzeugter Untervektorraum)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $E \subset V$.

- Der *von E erzeugte Untervektorraum von V* ist definiert durch
$$\operatorname{Span}_K(E) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}.$$
- Ist $\operatorname{Span}_K(E) = V$ so ist E ein *Erzeugendensystem von V*.
- Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V, so sagen wir auch kurz, dass $(v_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist, wenn die zugehörige Menge $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Anmerkung zum Lernen (erzeugter Unter…)**.** In der Situation von Definition 4.2.1 ist $\operatorname{Span}_K(E)$ tatsächlich ein K-Untervektorraum von V (nachrechnen!). Außerdem ist $\operatorname{Span}_K(E) \subset V$ der bezüglich Inklusion kleinste Untervektorraum von V, der die Menge E enthält (nachrechnen!). Nach demselben Prinzip kann man auch die von einer Teilmenge erzeugte Untergruppe bzw. den erzeugten Teilkörper etc. definieren.

Beispiel 4.2.2. In Vektorräumen der Form K^n gibt es ein ausgezeichnetes Erzeugendensystem, nämlich die Menge der Standardeinheitsvektoren.

- Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem von K^n, denn: Jedes Element $x \in K^n$ kann in der Form
$$x = ? \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$$
dargestellt werden.
- Andererseits ist $\{e_1\}$ *kein* Erzeugendensystem von K^2, denn die zweite Koordinate aller Elemente von $\operatorname{Span}_K(\{e_1\})$ ist 0; insbesondere ist daher $e_2 \in K^2 \setminus \operatorname{Span}_K(\{e_1\})$. Somit folgt $\operatorname{Span}_K(\{e_1\}) \neq K^2$.

Beispiel 4.2.3. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Aus der Definition von erzeugten Untervektorräumen folgt

$$\operatorname{Span}_K(\emptyset) = \boxed{?} \quad \{0\} \subset V \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Span}_K(V) = \boxed{?} \quad V.$$

Insbesondere ist V ein Erzeugendensystem von V (wenn auch kein besonders sparsames).

Wir können mit diesen Begriffen einen ersten Schritt in Richtung Komplexität von Vektorräumen gehen:

Definition 4.2.4 (endlich erzeugt)**.** Ein Vektorraum ist *endlich erzeugt*, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Beispiel 4.2.5. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist K^n nach Beispiel 4.2.2 endlich erzeugt.

Ist X eine unendliche Menge, so kann man zeigen, dass der Vektorraum $\operatorname{Abb}(X, K)$ *nicht* endlich erzeugt ist (wir werden später ein Hilfsmittel kennenlernen, mit dem man das einfach zeigen kann).

4.3 Lineare Unabhängigkeit

Eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum ist linear unabhängig, wenn diese Vektoren keine „unnötigen“ linearen Abhängigkeiten untereinander besitzen. Dies lässt sich mit Linearkombinationen wie folgt formalisieren:

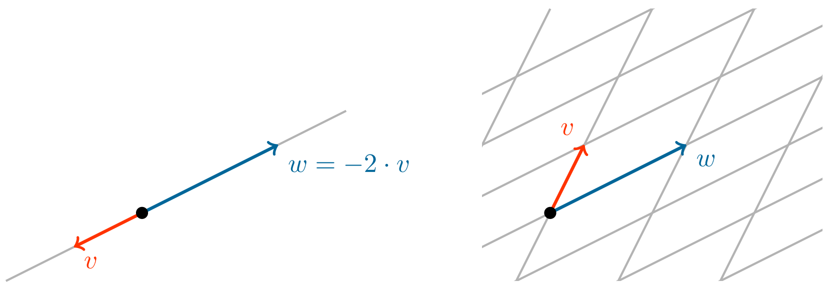
Definition 4.3.1 (linear abhängig, linear unabhängig)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

- Eine endliche Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *linear unabhängig*, wenn folgendes gilt: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ in K mit $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt bereits
$$\forall_{i \in I} \quad \lambda_i = 0.$$
- Eine Familie in V ist *linear abhängig*, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

Bemerkung 4.3.2 (linear abhängig, explizit)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Familie $(v_j)_{j \in \{1,\dots,n\}}$ (auch als $(v_1, \dots, v_n)$ geschrieben) ist genau dann linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\exists_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad \lambda_j \neq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = 0$$

gibt, d.h., wenn es eine „nicht-triviale“ Linearkombination der Familie gibt, die 0 ergibt.



spannen *keine* Ebene auf spannen eine Ebene auf

Abbildung 4.1.: Wann spannen zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ein geometrische Ursprungsebene auf?

Beispiel 4.3.3. Sei K ein Körper.

- Die leere Familie ist in jedem K-Vektorraum linear unabhängig.
- Die Familie, die nur aus 0 besteht, ist in jedem K-Vektorraum linear abhängig, denn $1 \neq 0$ aber $1 \cdot 0 = 0$.
- Ist V ein K-Vektorraum, ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V und gibt es $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und $v_i = v_j$, so ist diese Familie linear abhängig, denn

$$1 \neq 0 \quad \text{und} \quad 1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = v_i - v_j = 0.$$

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Familie $(e_1, \dots, e_n)$ in K^n linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot e_j = 0$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Also gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, dass $\lambda_j = 0$ ist.

Beispiel 4.3.4 (Ebenen)**.** Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$. Dann ist der von $\{v, w\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ genau dann geometrisch eine Ebene, wenn die Familie (v, w) linear unabhängig ist (siehe auch Abbildung 4.1).

Beispiel 4.3.5 (RGB)**.** Ein weitverbreitetes Modell zur Beschreibung von Farben ist *RGB* (als Abkürzung für *red*, *green*, *blue*). Es handelt sich dabei um ein additives Farbmodell (Wasserfarben und Farbdrucker hingegen mischen subtraktiv), das an die Funktionsweise des menschlichen Auges angelehnt ist, und z.B. in Computermonitoren und Bildsensoren für Digitalkameras verwendet wird. Farben im RGB-Modell werden durch Vektoren im Würfel

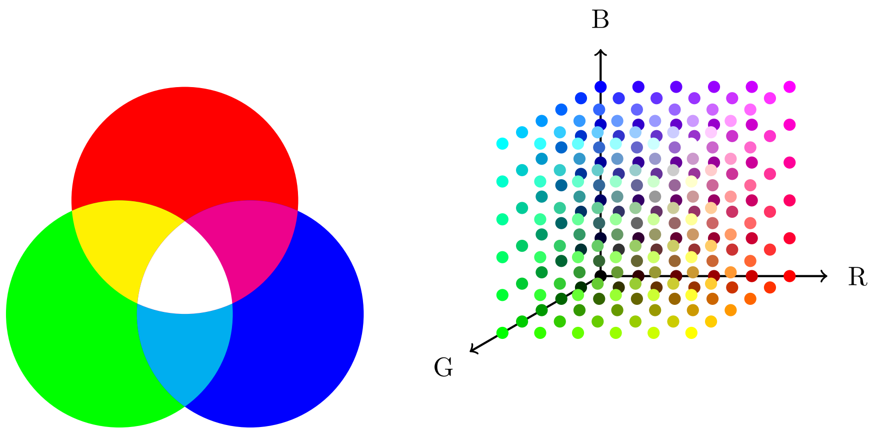


Abbildung 4.2.: Additive Farbmischung und der RGB-Würfel

$$[0,1]^3 := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; r,g,b \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

spezifiziert (Abbildung 4.2). In diesem Modell entspricht dann

- der Standardeinheitsvektor e_1 der Farbe rot,
- der Standardeinheitsvektor e_2 der Farbe grün,
- der Standardeinheitsvektor e_3 der Farbe blau,

und allgemein beschreiben die drei Koordinaten die Beteiligung der drei Grundfarben rot, grün, blau. Zum Beispiel erhalten wir die folgenden Entsprechungen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{pink} & \text{schwarz} & \text{weiß} \end{array}$$

Das Farbmodell ist insofern vernünftig gewählt, dass die lineare Unabhängigkeit der Familie (e_1, e_2, e_3) in $\mathbb{R}^3$ der physikalischen und biologischen Beobachtung entspricht, dass sich die Farben rot, grün, blau im additiven Farbmodell linear unabhängig verhalten. Zum Beispiel gibt es in diesem Farbmodell nur genau ein Tripel, das die Farbe schwarz beschreibt, nämlich den Nullvektor.

Caveat 4.3.6 (lineare Unabhängigkeit vs. paarweise lineare Unabhängigkeit). Ist eine Familie von Vektoren paarweise linear unabhängig, so ist sie im allgemeinen *nicht* linear unabhängig. Zum Beispiel sind die Vektoren $e_1, e_1 + e_2, e_2$ in $\mathbb{R}^2$ paarweise linear unabhängig, aber die Familie $(e_1, e_1 + e_2, e_2)$ ist linear abhängig (nachrechnen!). Lineare Unabhängigkeit ist also eine „globale“ Eigenschaft von Familien von Vektoren.

Linear abhängige Familien von Vektoren sind im folgenden Sinne redundant.

Proposition 4.3.7 (lineare Abhängigkeit und Darstellbarkeit). *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (d.h. diese Aussagen sind paarweise äquivalent):*

1. *Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist linear abhängig.*
2. *Einer der Vektoren aus der Familie ist als Linearkombination der anderen darstellbar, d.h.: Es gibt ein $i \in I$ und eine Familie $(\lambda_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ in K mit*
$$v_i = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j \cdot v_j.$$
3. *Es gibt ein $i \in I$ mit*
$$\operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I\}\bigr) = \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr).$$

Beweis. Es genügt, die drei Implikationen

$$\begin{array}{ccc} & 1. & \\ \swarrow\!\!\!\!\swarrow & & \nwarrow\!\!\!\!\nwarrow \\ 2. & \Longrightarrow & 3. \end{array}$$

zu zeigen, da dann jede der drei Aussagen die anderen beiden impliziert; an dieser Stelle geht die folgende aussagenlogische Tautologie ein, wobei A, B, C aussagenlogische Variablen sind:

$$\bigl((A \Longrightarrow B) \land (B \Longrightarrow C)\bigr) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$$

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ sei linear abhängig. Insbesondere ist die Familie somit nicht-leer und es existiert eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0,$$

wobei es ein $i \in I$ mit $\lambda_i \neq 0$ gibt. Dann ist

$$v_i = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot v_j$$

eine Linearkombination der gewünschten Form.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Es gebe ein $i \in I$ und eine Familie $(\lambda_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ in K mit

$$v_i = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \in \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr).$$

Damit folgt $\operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I\}\bigr) \subset \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr)$. Umgekehrt gilt nach Definition $\operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr) \subset \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I\}\bigr)$. Also ist $\operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr) = \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I\}\bigr)$.

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Es gebe ein $i \in I$ mit

$$\operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I\}\bigr) = \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr).$$

Insbesondere ist $v_i \in \operatorname{Span}_K\bigl(\{v_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}\bigr)$. Aus der Definition von Span_K folgt: Es gibt eine Familie $(\lambda_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ in K mit

$$v_i = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \lambda_j \cdot v_j.$$

Umstellen dieser Gleichung ergibt: Dann ist

$$1 \cdot v_i + \sum_{j \in J} (-\lambda_j) \cdot v_j = 0$$

eine Linearkombination der gegebenen Familie, die 0 ergibt, und einer der Koeffizienten (nämlich der von v_i) ist nicht 0. Also ist die Familie linear abhängig. $\square$

Linear unabhängige Familien von Vektoren sind also in dem Sinne effizient, dass jeder Vektor auf höchstens eine Art als Linearkombination einer gegebenen linear unabhängigen Familie geschrieben werden kann:

Proposition 4.3.8 (lineare Unabhängigkeit und Darstellbarkeit). *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Familie in V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.*
2. *Die folgende Abbildung ist injektiv:*

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow V \\ \lambda &\longmapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot v_j \end{aligned}$$

Beweis. Man kann dies aus Proposition 4.3.7 folgern oder die beiden Implikationen ausgehend von den Definitionen ableiten (Übungsaufgabe). □

Wir werden später einen Algorithmus kennenlernen, mit dem man überprüfen kann, ob eine Familie in K^n linear unabhängig ist oder nicht.

4.4 Basen

Basen sind linear unabhängige Erzeugendensysteme. Wir werden feststellen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt und dass je zwei Basen dieselbe Mächtigkeit haben. Dies führt zum Begriff der Dimension eines Vektorraums (Kapitel 4.5).

Definition 4.4.1 (Basis)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine (endliche) Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist eine *Basis von* V, wenn

- die Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist
- und $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Beispiel 4.4.2 (Standardbasis)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(e_j)_{j \in \{1,\dots,n\}}$ eine Basis von K^n, die sogenannte *Standardbasis von* K^n.

Man beachte dabei aber, dass K^n noch viele andere Basen besitzt: Zum Beispiel ist für jedes $\lambda \in K \setminus \{0\}$ auch $(\lambda \cdot e_j)_{j \in \{1,\dots,n\}}$ eine Basis von K^n. Eine weitere Basis von K^n ist zum Beispiel $(e_1 + e_2, e_2, \dots, e_n)$. Wir werden später lernen, wie man alle Basen von K^n beschreiben kann.

Sind folgende Familien Basen von K^n ?

- $(e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n)$

  Ja Nein Die korrekte Antwort ist „Nein“. Diese Familie ist nicht linear unabhängig. ×

- $(e_1, \dots, e_{n-1})$

  Ja Nein Die korrekte Antwort ist „Nein“. Diese Familie ist kein Erzeugendensystem von K^n, falls $n > 0$ ist. ×

Bemerkung 4.4.3 (eindeutige Darstellbarkeit durch Basen)**.** Warum sind Basen so gut geeignet, Vektorräume effizient zu beschreiben? Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V, so gilt: Zu jedem Vektor v gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j.$$

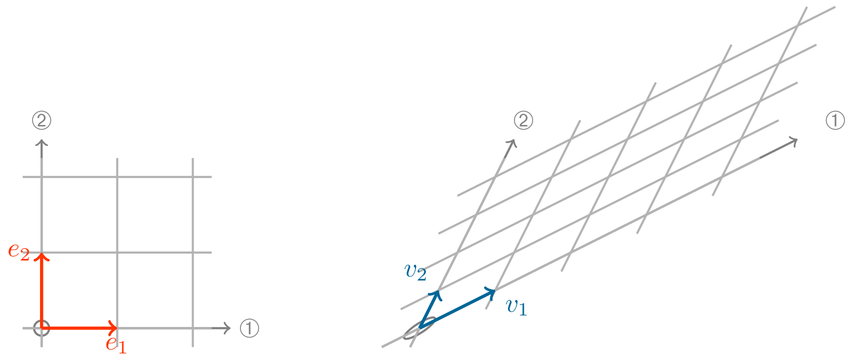


Abbildung 4.3.: Die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und eine weitere Basis

Die Existenz folgt, da $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist; die Eindeutigkeit folgt mit Proposition 4.3.8 aus der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \dots, v_n)$.

Bemerkung 4.4.4 (Basen als Koordinatensysteme)**.** Es ist daher vernünftig, sich vorzustellen, dass Basen eine Verallgemeinerung des durch $(e_1, \dots, e_n)$ gegebenen Koordinatensystems in K^n sind (Abbildung 4.3; Kapitel 4.6).

In manchen Situationen ist es günstig, Basen auch durch die folgenden alternativen Charakterisierungen beschreiben zu können:

Satz 4.4.5 (alternative Charakterisierungen von Basen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i \in I}$ eine (endliche) Familie in V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V.*
2. *Es ist $(v_i)_{i \in I}$ eine maximale linear unabhängige Familie (d.h. diese Familie ist linear unabhängig und jede Familie in V, die diese Familie als echte Teilfamilie enthält, ist linear abhängig).*
3. *Es ist $\{v_i \mid i \in I\}$ ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h. diese Menge ist ein Erzeugendensystem und ist $J \subset I$ eine echte Teilmenge, so ist $\{v_j \mid i \in J\}$* kein *Erzeugendensystem von V).*

Beweis. Alle Aussagen sind Konsequenzen aus Proposition 4.3.7:

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Nach Definition ist $(v_i)_{i \in I}$ somit linear unabhängig. Warum liegt Maximalität vor? Da $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, gilt dies auch für jede Familie, die $(v_i)_{i \in I}$ als echte Teilfamilie enthält. Mit Proposition 4.3.7 (genauer mit der Implikation „3. $\Longrightarrow$ 1.“) folgt, dass jede solche echte Oberfamilie linear abhängig ist.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine maximale linear unabhängige Familie. Dann ist $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V, denn: Sei $v \in V$. Fügt man v zur gegebenen Familie hinzu, so ist die neue Familie (aufgrund der Maximalität) linear abhängig. Mit Proposition 4.3.7 (genauer mit der Äquivalenz „1. $\Longleftrightarrow$ 2.") erhalten wir somit, dass v als Linearkombination der $(v_i)_{i\in I}$ dargestellt werden kann. Also ist $v \in \operatorname{Span}_K(\{v_i \mid i \in I\})$. Insgesamt folgt $V = \operatorname{Span}_K(\{v_i \mid i \in I\})$. Außerdem ist dieses Erzeugendensystem von V aufgrund der linearen Unabhängigkeit minimal nach Proposition 4.3.7 (genauer nach der Kontraposition der Implikation „3. $\Longrightarrow$ 1.").

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Sei $\{v_i \mid i \in I\}$ ein minimales Erzeugendensystem von V. Dann ist die Familie $(v_i)_{i\in I}$ nach Proposition 4.3.7 (genauer nach der Kontraposition der Implikation „1. $\Longrightarrow$ 3.") linear unabhängig. $\square$

Um sinnvoll mit Basen in Vektorräumen arbeiten zu können, sind die folgenden Fragen zu beantworten:

- Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?
- Welche Gemeinsamkeiten haben Basen desselben Vektorraums?

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall endlich erzeugter Vektorräume. Die analogen Aussagen gelten auch für allgemeine Vektorräume [5].

Satz 4.4.6 (Existenz von Basen)**.** *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis.*

Beweis. Die Idee ist, die Charakterisierung von Basen als minimale Erzeugendensysteme zu verwenden, und die folgende (etwas stärkere) Aussage zu zeigen, indem wir so lange Vektoren aus einem endlichen Erzeugendensystem entfernen, bis ein minimales Erzeugendensystem vorliegt:

> Ist K ein Körper und ist V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit endlichem Erzeugendensystem E, so gibt es eine Basis von V, die nur aus Elementen von E besteht (insbesondere ist eine solche Basis also auch endlich, da E nur endlich viele Elemente enthält und in einer Basis keine Vektoren mehrfach vorkommen können).

Wir beweisen dies induktiv über die Anzahl $\#E$ der Elemente von E:

- *Induktionsanfang.* Ist $\#E = 0$, so ist $E = \emptyset$. Insbesondere ist E dann linear unabhängig und somit eine Basis (von $V = \operatorname{Span}_K \emptyset = \{0\}$).
- *Induktionsvoraussetzung.* Sei $\#E > 0$ und die Behauptung in allen Fällen mit Erzeugendensystemen mit weniger Elementen bereits gezeigt.
- *Induktionsschritt.* Wir zeigen die Behauptung für E. Da E endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $E = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

① Ist E ein minimales Erzeugendensystem von V, so ist $(v_1, \dots, v_n)$ nach Satz 4.4.5 eine Basis.

② Ist E *kein* minimales Erzeugendensystem von V, so gibt es also ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft, dass $E' := E \setminus \{v_j\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Wegen $\#E' \leq \#E - 1 < \#E$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf E' anwenden und finden somit eine Teilfamilie von $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$, die eine Basis von V ist.

Also gibt es eine Basis von V, die nur aus Elementen von E besteht. □

Um Basen gut miteinander vergleichen zu können, gibt es zwei zentrale Hilfsmittel, den Austauschsatz und den Ergänzungssatz.

Satz 4.4.7 (Austauschsatz). *Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Ist $w \in V \setminus \{0\}$, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so dass*

$$(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

eine Basis von V ist.

Genauer gilt: Ist $k \in \{1, \dots, n\}$ und ist die Familie $(v_1, \dots, v_k, w)$ linear unabhängig, so kann $j > k$ gewählt werden.

Beweis. Wir schreiben w als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ und stellen die entstehende Gleichung geeignet um: Da $(v_1, \dots, v_n)$ als Basis ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$w = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \cdot v_r.$$

Wegen $w \neq 0$ ist einer dieser Koeffizienten nicht 0; sei etwa $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$ (für die Zusatzbehauptung beachte man, dass man hier $j > k$ wählen kann und dass aufgrund der Maximalität von Basen $k < n$ ist).

Wir zeigen, dass die Familie $B := (v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist:

- Die B unterliegende Menge ist ein Erzeugendensystem von V, denn: Nach Konstruktion von B genügt es zu zeigen, dass v_j in $\operatorname{Span}_K(B)$ liegt. Aus der obigen Gleichung für w erhalten wir

  $$v_j = 1 \cdot w + \sum_{r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} \frac{-\lambda_r}{\lambda_j} \cdot v_j,$$

  und damit $v_j \in \operatorname{Span}_K(B)$.

- Die Familie B ist linear unabhängig, denn: Seien μ, $\mu_1, \dots, \mu_{j-1}$, $\mu_{j+1}, \dots, \mu_n \in K$ mit

$$\mu \cdot w + \sum_{r \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} \mu_r \cdot v_r = 0.$$

Indem wir die obige Gleichung für w in diese Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\mu \cdot \lambda_j \cdot v_j + \sum_{r \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (\mu \cdot \lambda_r + \mu_r) \cdot v_r = 0.$$

Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie ist, liefert dies $\mu \cdot \lambda_j = 0$ und $\mu \cdot \lambda_r + \mu_r = 0$ für alle $r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Nach Konstruktion ist $\lambda_j \neq 0$, und damit liefert die Gleichung $\mu \cdot \lambda_j = 0$, dass $\mu = 0$. Aus den anderen Gleichungen folgt dann $\mu_r = 0$ für alle $r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Daher ist B linear unabhängig.

Also ist B eine Basis von V, wie behauptet. □

Als Folgerung erhalten wir durch iteriertes Anwenden des Austauschsatzes die folgende Variante:

Korollar 4.4.8 (iterierter Austausch)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \ldots, w_m)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, n\}$, so dass die zusammengesetzte Familie*

$$\bigl(w_1, \ldots, w_m, (v_j)_{j \in J}\bigr)$$

eine Basis von V ist. Außerdem gilt $m \leq n$.

Beweis. Wir können m-mal den Austauschsatz (Satz 4.4.7) anwenden und erhalten so induktiv Basen

$$\begin{aligned}
&\bigl(w_1, \text{eine Teilfamilie von } (v_1, \ldots, v_n)\bigr), \\
&\bigl(w_1, w_2, \text{eine Teilfamilie von } (v_1, \ldots, v_n)\bigr), \\
&\bigl(w_1, w_2, w_3, \text{eine Teilfamilie von } (v_1, \ldots, v_n)\bigr), \\
&\qquad \vdots \\
&\bigl(w_1, \ldots, w_m, \text{eine Teilfamilie von } (v_1, \ldots, v_n)\bigr),
\end{aligned}$$

von V; man beachte dabei, dass aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $(w_1, \ldots, w_m)$ wirklich in jedem Schritt gegen einen Vektor aus $(v_1, \ldots, v_n)$ und nicht gegen einen der bereits eingefügten Vektoren aus $(w_1, \ldots, w_m)$ getauscht wird. Insbesondere ist $m \leq n$ und im letzten Schritt erhalten wir eine Basis von V von der gewünschten Form. □

Beispiel 4.4.9. Also ist jede Familie mit mindestens vier Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear abhängig (da die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ nur drei Elemente enthält).

Korollar 4.4.10 (alle Basen haben dieselbe Länge). *Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_m)$ Basen von V. Dann folgt $n = m$.*

Beweis. Da Basen linear unabhängige Systeme sind, können wir den iterierten Austauschsatz (Korollar 4.4.8) in beide Richtungen anwenden; auf diese Weise erhalten wir $m \leq n$ und $n \leq m$, und damit $m = n$. □

Beispiel 4.4.11 (Basen von K^n). Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so besteht *jede* Basis von K^n aus genau n Vektoren (da die Standardbasis dies erfüllt).

Korollar 4.4.12 (Ergänzungssatz). *Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $(w_1, \dots, w_m)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$ und Vektoren $v_{m+1}, \dots, v_n$, so dass $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.*

Beweis. Nach Satz 4.4.6 besitzt V eine endliche Basis. Auf eine solche Basis und die gegebene linear unabhängige Familie $(w_1, \dots, w_m)$ wenden wir den iterierten Austauschsatz (Korollar 4.4.8) an und erhalten so eine Basis von V von der gewünschten Form. □

4.5 Dimension

Nach Satz 4.4.6 besitzt jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis; nach Korollar 4.4.10 haben je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums dieselbe Länge. Also können wir die „Größe“ eines Vektorraums dadurch messen, dass wir die Größe von Basen betrachten.

Definition 4.5.1 (Dimension). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

- Ist V endlich erzeugt und ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so definieren wir die *Dimension von V* als
$$\dim_K(V) := n.$$
In diesem Fall sagt man auch, dass V *endlich-dimensional* ist.

- Ist V nicht endlich erzeugt, so definieren wir die *Dimension von V* als die Mächtigkeit einer/jeder Basis von V. Wir schreiben dann oft auch (etwas vereinfachend)
$$\dim_K(V) := \infty$$
und sagen, dass V *unendlich-dimensional* ist.

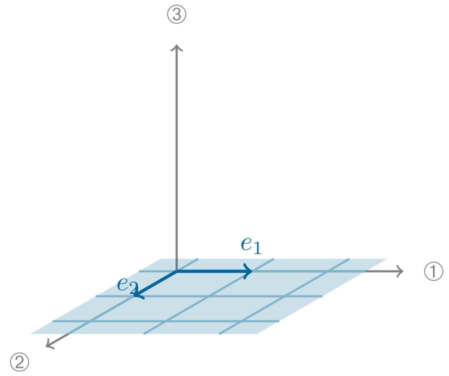


Abbildung 4.4.: Der Untervektorraum $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_2\})$ von $\mathbb{R}^3$

Beispiel 4.5.2.

- Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $\dim_K K^n =$? n, da die Standardbasis von K^n genau n Vektoren enthält.

  Insbesondere ist $\dim_K\{0\} =$? 0.

- Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$? 1, aber $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$? 2.

- Es gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$; genauer: jede $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$ hat dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$. Beide Behauptungen folgen aus einem Mächtigkeitsargument, da $\mathbb{Q}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar ist [8, Kapitel 7.5].

- Für $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_2\}) =$? 2 (Abbildung 4.4), da (e_1, e_2) eine Basis von $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_2\})$ ist.

  Allgemeiner entsprechen zweidimensionale Unterräume genau den geometrischen Ebenen (durch 0) und eindimensionale Unterräume genau den geometrischen Geraden (durch 0).

Proposition 4.5.3 (Dimension von Unterräumen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist auch U endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim_K U \leq \dim_K V.$$

Ist $U \neq V$, so folgt sogar $\dim_K U < \dim_K V$.

Beweis. Mithilfe des Ergänzungssatzes und Proposition 4.3.7 kann man zeigen, dass mit V auch U endlich erzeugt ist (nachrechnen!). Die Dimensionsabschätzungen folgen dann aus dem Ergänzungssatz (nacrechnen!). $\square$

Proposition 4.5.4 (Dimension von direkten Summen). *Sei K ein Körper und U, W seien endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt*

$$\dim_K(U \oplus W) = \dim_K U + \dim_K W.$$

Beweis. Ist $(u_1, \dots, u_m)$ eine Basis von U und $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W, so ist $\bigl((u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\bigr)$ eine Basis von $U \oplus W$ (nachrechnen!). Daraus ergibt sich nach Definition der Dimension, dass $\dim_K(U \oplus W) = m + n = \dim_K U + \dim_K W$. □

4.6 Anwendung*: Koordinatensysteme

Basen liefern Koordinatensysteme für Vektorräume. Dieser Blickwinkel tritt in den Anwendungen in vielen verschiedenen Situationen auf:

- Farbschemata: Neben dem RGB-Schema (Beispiel 4.3.5) gibt es weitere Farbschemata, die Farben durch Tupel reeller Zahlen kodieren. Die „Grundfarben" des jeweiligen Modells bilden dabei in einem geeigneten Sinn eine Basis.

- Kameraposition/-blick in der Computergraphik: Bei der Modellierung von 3D-Szenarien in Computerspielen bzw. Simulationen wird die aktuelle Ansicht bezüglich des aktuellen Standpunktes und der aktuellen Blickrichtung etc. generiert. Der Standpunkt entspricht dabei dem Ursprung (oder man muss affin modellieren) und die „Blickrichtung" entspricht einer Basis bezüglich der das 3D-Szenario dargestellt wird.

- Geometrische Repräsentation von Multiparameterdaten: In der Datenanalyse werden Daten oft geometrisch repräsentiert, indem die Werte der Parameter als Koordinaten aufgefasst werden.

- Fourieranalyse zur Beschreibung von Tönen: (Periodische) Tonsignale können als (unendliche …) Linearkombinationen von Sinusfunktionen beschrieben werden. Dies erlaubt eine Analyse und effiziente Repräsentation von Musikdaten. Genaugenommen handelt es sich dabei um eine verallgemeinerte Form von Basen – mit analytischen Methoden kann man genau erklären, welche unendlichen Linearkombinationen zulässig sind und wie damit umgegangen werden kann.

Bei der Modellierung ist darauf zu achten, dass die gewählte Koordinatenbeschreibung tatsächlich eine Basis in der modellierten Situation liefert; sonst ist im allgemeinen nicht gewährleistet, dass jede Situation repräsentiert werden kann (falls kein Erzeugendensystem vorliegt), bzw., dass verschiedene Repräsentationen zu verschiedenen Situationen gehören (falls keine lineare Unabhängigkeit vorliegt). Insbesondere in der Datenanalyse kann das im allgemeinen nicht im Voraus garantiert werden.

5

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren erlaubt es, lineare Gleichungssysteme algorithmisch zu lösen. Insbesondere erhalten wir somit ein Verfahren, um Matrizen auf Invertierbarkeit zu überprüfen bzw. inverse Matrizen zu berechnen, um Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu testen, Basen aus endlichen Erzeugendensystemen auszuwählen ...

Die grundlegende Idee des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist, systematisch Zeilenoperationen durchzuführen, um eine Zeilenstufenform zu erhalten, an der man die Lösungen direkt ablesen kann.

Überblick über dieses Kapitel.

5.1 Zeilenstufenform

Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform können durch „Rückwärtsauflösen“ von unten nach oben rekursiv gelöst werden. Die folgende Proposition enthält die allgemeine Beschreibung dieses Verfahrens. Es empfiehlt sich jedoch, sich nicht diese allgemeine Formulierung zu merken, sondern den dem Verfahren unterliegenden (einfachen!) Mechanismus anhand von konkreten Beispielen zu verstehen.

Proposition 5.1.1 (Zeilenstufenform)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei A in* Zeilenstufenform*, d.h. die Matrix A ist von der Gestalt in Abbildung 5.1.*

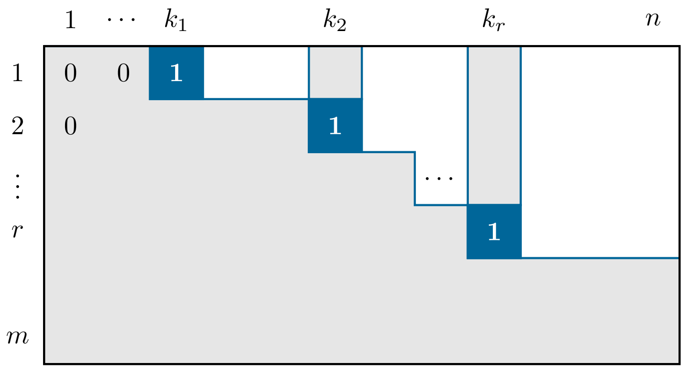


Abbildung 5.1.: Eine Matrix in Zeilenstufenform, schematisch

Dabei ist $r \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$, die Indizes $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ erfüllen $k_1 < \dots < k_r$, der graue Bereich enthält nur Nullen und der weiße Bereich enthält Elemente aus K. Man bezeichnet dann die Spalten $A_{*,k_1}, \dots, A_{*,k_r}$ auch als Pivotspalten[1] *von A. Dann gilt:*

1. *Es ist*

$$V(A, 0) = \left\{ x \in K^n \;\middle|\; \forall_{j \in \{1,\dots,r\}} \quad x_{k_j} = -\sum_{k=k_j+1}^{n} A_{j,k} \cdot x_k \right\}.$$

[1]Pivot: Dreh- und Angelpunkt

Man beachte, dass man hierbei x_j mit $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k_1,\dots,k_r\}$ „frei in K wählen" kann und dass man daraus $x_{k_r},\dots,x_{k_1}$ rekursiv (eindeutig) berechnen kann.

2. *Ist $r = 0$, so ist $A = 0$ und $V(A,0) = K^n$.*

   Ist $r \neq 0$, so ist $(v_s)_{s\in\{1,\dots n\}\setminus\{k_1,\dots,k_r\}}$ eine Basis von $V(A,0) \subset K^n$, wobei für alle $j \in \{1,\dots,r\}$ und alle $s \in \{k_j+1,\dots,k_{j+1}-1\}$ (mit $k_{r+1} := n+1$) der Vektor v_s durch $v_{s,s} := 1$ und

$$\begin{aligned} \forall_{\ell\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k_1,\dots,k_j,s\}} \quad v_{s,\ell} &:= 0 \\ v_{s,k_j} &:= -A_{j,s} \\ v_{s,k_{j-1}} &:= -A_{j-1,s} \\ &\vdots \\ v_{s,k_1} &:= -A_{1,s} \end{aligned}$$

   gegeben ist; für $s \in \{1,\dots,k_1-1\}$ sei $v_s := e_s$. Insbesondere gilt $\dim_K V(A,0) = n - r$.

3. Inhomogener Fall. *Sei $b \in K^m$. Dann gilt:*
   - *Gibt es ein $j \in \{r+1,\dots,m\}$ mit $b_j \neq 0$, so ist $V(A,b) = \emptyset$.*
   - *Gilt $b_j = 0$ für alle $j \in \{r+1,\dots,m\}$, so ist $x \in K^n$ mit*

$$\begin{aligned} \forall_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k_1,\dots,k_r\}} \quad x_j &:= 0 \\ x_{k_r} &:= b_r \\ x_{k_{r-1}} &:= b_{r-1} \\ &\vdots \\ x_{k_1} &:= b_1 \end{aligned}$$

     ein Element von $V(A,b)$. Insbesondere ist $V(A,b) = x + V(A,0)$.

Beweis. Zu 1. Dass $V(A,0)$ die angegebene Gestalt hat, sieht man, indem man das lineare Gleichungssystem

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = 0$

in Zeilenstufenform explizit „von unten nach oben" auflöst.

Zu 2. Es ist leicht zu sehen, dass die angegebene Familie linear unabhängig ist (man beachte jeweils die „s-te" Koordinate). Außerdem sieht man an der Darstellung aus dem ersten Teil, dass sie $V(A,0)$ erzeugt.

Zu 3. Dies folgt durch direktes Nachrechnen und Proposition 3.3.4. □

Beispiel 5.1.2 (Lösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Diese ist in Zeilenstufenform mit $k_1 =$? 1, $k_2 =$? 3 und $r =$? 2) sowie die Vektoren

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dann liefert Proposition 5.1.1 bzw. rekursives Auflösen (von der vierten Variablen rückwärts bis zur ersten) der zugehörigen linearen Gleichungssysteme

Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & & & - & 6 \cdot x_4 & = \dots \\ & & & & 1 \cdot x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = \dots \\ & & & & & & 0 & = \dots \end{array}$$

dass

$$V(A,0) = \text{?} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - 6 \cdot x_4 \\ x_2 \\ -2 \cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}, \ \text{mit Basis} \ \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V(A,b) = \text{?} \quad \emptyset \ \text{(man beachte die letzte Gleichung)},$$

$$V(A,c) = \text{?} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + V(A,0), \ \text{denn} \ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V(A,c).$$

5.2 Zeilenoperationen

Das Gaußsche Eliminationsverfahren überführt eine gegebene Matrix in Zeilenstufenform und beruht auf drei grundlegenden Zeilenoperationen:

- Vertauschen zweier Zeilen,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,
- Multiplikation einer Zeile mit einem (multiplikativ invertierbaren) Element aus dem Grundkörper.

Wir beschreiben diese Zeilenoperationen genauer und untersuchen den Effekt auf Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

Matrix Z	Abbildung $x \mapsto Z \cdot x$	Zeilenoperation $A \rightsquigarrow Z \cdot A$	Inverses Z^{-1}
$V_{j,k}$	Vertauschung der Koordinaten j und k	Vertauschung der j-ten und k-ten Zeile Notation: $(j) \leftrightarrow (k)$	$V_{j,k}$
$S_{j,k}(\lambda)$	Scherung in der Koordinatenebene j und k	Addition des λ-fachen der k-ten Zeile zur j-ten Zeile Notation: $(j) + \lambda \cdot (k)$	$S_{j,k}(-\lambda)$
$M_j(\lambda)$	Streckung der j-ten Koordinatenachse	Multiplikation der j-ten Zeile mit λ Notation: $\lambda \cdot (j)$	$M_j(1/\lambda)$

Abbildung 5.2.: Elementare Zeilenoperationen

Definition 5.2.1 (Elementarmatrizen)**.** Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Die *Elementarmatrizen auf m Zeilen* sind:

- Zu $j, k \in \{1, \dots, m\}$ sei $E_{j,k}$ die Matrix in $\mathrm{M}_{m\times m}(K)$, die bis auf die Position (j, k) nur Nullen enthält und an der Position in der j-ten Zeile und k-ten Spalte den Eintrag 1 besitzt.
- Zu $j, k \in \{1, \dots, m\}$ mit $j \neq k$ sei
$$V_{j,k} := I_m - E_{j,j} - E_{k,k} + E_{j,k} + E_{k,j} \in \mathrm{M}_{m\times m}(K).$$
- Zu $j, k \in \{1, \dots, m\}$ mit $j \neq k$ und $\lambda \in K$ sei
$$S_{j,k}(\lambda) := I_m + \lambda \cdot E_{j,k} \in \mathrm{M}_{m\times m}(K).$$
- Zu $j \in \{1, \dots, m\}$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$ sei
$$M_j(\lambda) := I_m - E_{j,j} + \lambda \cdot E_{j,j} \in \mathrm{M}_{m\times m}(K).$$

Proposition 5.2.2 (elementare Zeilenoperationen)**.** *Sei K ein Körper und sei $m \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich jede elementare Zeilenoperation durch eine Elementarmatrix beschreiben und die Elementarmatrizen auf m Zeilen sind invertierbar, also in $\mathrm{GL}_m(K)$.*

Beweis. Dies kann man leicht nachrechnen (vgl. Abbildung 5.2). □

Korollar 5.2.3 (elementare Zeilenoperationen und Lösungsmengen)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ und seien $Z_1, \dots, Z_k \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ Elementarmatrizen sowie $Z := Z_k \cdot \dots \cdot Z_1$. Sind $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$, so gilt*
$$V(A, b) = V(Z \cdot A, Z \cdot b).$$

Beweis. Da $Z_1, \dots, Z_k$ invertierbar sind (Proposition 5.2.2), ist auch das Produkt $Z = Z_k \cdot \dots \cdot Z_1$ invertierbar (mit dem Inversen $Z_1^{-1} \cdot \dots \cdot Z_k^{-1}$). Die Behauptung folgt daher aus Proposition 3.3.5. □

5.3 Der Gaußsche Algorithmus

Mithilfe elementarer Zeilenoperationen können wir den Gaußschen Algorithmus formulieren und seine Korrektheit beweisen. Der Gaußsche Algorithmus transformiert das betrachtete lineare Gleichungssystem in ein System in Zeilenstufenform, dessen Lösungen man direkt ablesen kann (Proposition 5.1.1).

Algorithmus 5.3.1 (das Gaußsche Eliminationsverfahren)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$. Sei $(A \mid b)$, die (rechts) um die Spalte b erweiterte Matrix. Wir berechnen daraus wie folgt eine erweiterte Matrix. Die Notation ist in Abbildung 5.3 veranschaulicht.

- Wir wenden Elimination ab Spalte 1 und Zeile 1 auf $(A \mid b)$ an, wobei:
- *Elimination ab Spalte $\kappa \in \{1, \dots, n\}$ und Zeile M für* $(A \mid b)$: Wir suchen die erste Spalte k in $\{\kappa, \dots, n\}$ (von links gezählt), die in einer der Zeilen $\{M, \dots, m\}$ einen Koeffizienten ungleich 0 enthält.
  - Falls keine solche Spalte existiert, beenden wir den Algorithmus. Die bisher berechnete erweiterte Matrix ist das Ergebnis.
  - Falls eine solche Spalte k existiert, bestimmen wir eine neue erweiterte Matrix, deren neue Zeilen wie folgt berechnet werden:
    1. Wir suchen die erste Zeile $J \in \{M, \dots, m\}$ mit $A_{J,k} \neq 0$ (das sogenannte *Pivotelement*) und multiplizieren die J-te Zeile der erweiterten Matrix mit $1/A_{J,k}$.
       [Die J-te Zeile beginnt somit nach den führenden Nullen in Spalte k mit 1.]
    2. Für jedes $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{J\}$ addieren wir das $-A_{j,k}$-fache dieser neuen J-ten Zeile zur j-ten Zeile der erweiterten Matrix.
       [In der k-ten Spalte stehen dann in den Zeilen $\{1, \dots, m\} \setminus \{J\}$ nur Nullen]
    3. Wir tauschen die J-te Zeile und die M-te Zeile dieser neuen erweiterten Matrix (falls $J \neq M$).
       [Auf diese Weise sind die Stufen dicht gepackt.]

    Wir erhalten so eine (erweiterte) Matrix $(A' \mid b')$ und wenden rekursiv Elimination ab Spalte $k+1$ und Zeile $M+1$ auf $(A' \mid b')$ an.

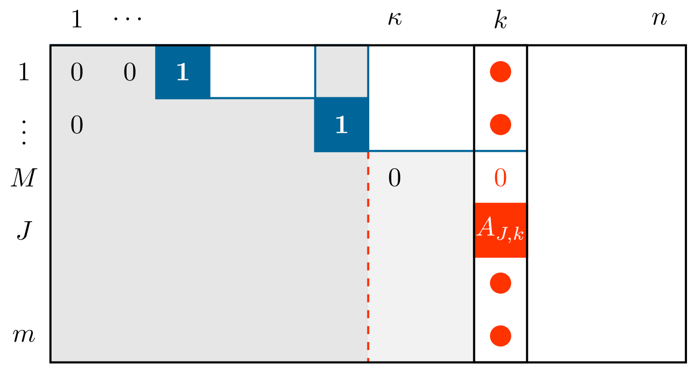


Abbildung 5.3.: Das Gaußsche Eliminationsverfahren: Notation; als nächstes wird $A_{J,k}$ in 1 transformiert, dann werden die roten Punkte zu Nullen transformiert und anschließend die Zeilen J und M getauscht.

Beispiel 5.3.2. Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir führen das Gaußsche Eliminationsverfahren für $(A \mid b)$ und $(A \mid c)$ durch. Um Zeit und Platz zu sparen, wenden wir das Verfahren simultan auf beide Situationen an, indem wir die doppelt erweiterte erweiterte Matrix $(A \mid b \mid c)$ betrachten und den linken 3×4-Block auf Zeilenstufenform bringen (Abbildung 5.4).

Satz 5.3.3 (Analyse des Gaußschen Eliminationsverfahrens)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$.*

1. *Wendet man das Gaußsche Eliminationsverfahren auf A und b an, so terminiert der Algorithmus und für die resultierende erweiterte Matrix $(A' \mid b')$ ist A' in* Zeilenstufenform*.*

2. *Es gilt*
$$V(A, b) = V(A', b').$$
Insbesondere kann dann $V(A, b)$ als $V(A', b')$ explizit wie in Proposition 5.1.1 beschrieben werden.

Beweis. Zu 1. Aus der Beschreibung des Algorithmus ist ersichtlich, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert (die Ausgangsmatrix hat nur endlich viele Zeilen und Spalten, und die Anzahl der Zeilen bzw.

$$\text{Pivot?} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(2)} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\text{Pivot?} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3)+2\cdot(2)} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1)-3\cdot(2)} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Abbildung 5.4.: Das Gaußsche Eliminationsverfahren in Beispiel 5.3.2.

Spalten ändert sich nicht). Außerdem folgt induktiv, dass der Algorithmus eine (erweiterte) Matrix in Zeilenstufenform liefert.

Zu 2. Da sich elementare Zeilenoperationen durch Elementarmatrizen beschreiben lassen, folgt der zweite Teil aus der Invertierbarkeit von Elementarmatrizen (Korollar 5.2.3). □

Beispiel 5.3.4. Insbesondere können wir in Beispiel 5.3.2 Beschreibungen von $V(A,0)$, $V(A,b)$, $V(A,c)$ aus der berechneten Zeilenstufenform ablesen. Die zugehörigen Lösungsmengen haben wir in Beispiel 5.1.2 bestimmt.

Ausblick 5.3.5 (Komplexität)**.** Zu einer vollständigen Analyse eines Algorithmus gehört im Normalfall auch eine Abschätzung der Komplexität bzw. Laufzeit. Dies würde hier aber zu weit führen.

Caveat 5.3.6 (numerische Aspekte)**.** Aus der Perspektive der Numerik ist das Gaußsche Eliminationsverfahren nicht in allen Szenarien ein günstiger Algorithmus. Das Hauptproblem ist, dass bei der Behandlung von Pivotelementen Divisionen durch sehr kleine Zahlen auftreten können (die dann zu großen Ergebnissen, Rundungsfehlern bzw. Überläufen führen können und sich in den Ergebnissen stark akkumulieren). Insbesondere bei der Verwendung von Fließkommaarithmetik ist daher Vorsicht geboten. Bei der Verwendung von exakter Arithmetik ist entsprechend mit einem hohen Platz-/Zeitbedarf zu rechnen, da potentiell sehr große/kleine Werte auftreten. Je nach Art des vorliegenden linearen Gleichungssystems sollte somit auf ein passendes Verfahren zurückgegriffen werden. Eine genauere Untersuchung solcher Fragestellung bzw. alternativer Algorithmen ist Gegenstand der Numerik.

5.4 Gauß-Rezepte

Wir geben eine Auswahl von Standardsituationen an, die mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren behandelt werden können:

Caveat 5.4.1. Typischerweise sind Berechnungen von Hand mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren recht fehleranfällig (s. Vorlesung …). Sie sollten Ihre Ergebnisse daher mit einem Computeralgebrasystem überprüfen oder stichprobenartig von Hand nachrechnen, dass das Ergebnis plausibel ist.

Rezept 5.4.2 (Lösung linearer Gleichungssysteme)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$.
- *Gesucht* sei $V(A,b)$, d.h. ein Element von $V(A,b)$ und eine Basis von $V(A,0)$.
- *Rezept:* Man wendet das Gaußsche Eliminationsverfahren auf die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ an und liest dann die Lösung an der entstandenen Zeilenstufenform ab; dabei bestimmt man (jeweils durch rekursives Rückwärtsauflösen; Proposition 5.1.1)
  - eine Basis von $V(A,0)$, sowie
  - eine spezielle Lösung in $V(A,b)$.
- *Begründung:* Dies ist der Inhalt von Satz 5.3.3 und Proposition 5.1.1.

Rezept 5.4.3 (Test auf lineare Unabhängigkeit)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $v_1, \dots, v_n \in K^m$.
- *Gesucht* sei die Antwort auf die Frage, ob die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist.
- *Rezept:* Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$. Man bestimmt dann $V(A, 0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Rezept 5.4.2).
  - Ist $V(A, 0) = \{0\}$, so ist die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig.
  - Ist $V(A, 0) \neq \{0\}$, so ist die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig.
- *Begründung:* Durch Reformulierung der Definition von linearer Unabhängigkeit folgt: Das lineare Gleichungssystem

  Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = 0$

  besitzt genau dann keine nicht-triviale Lösung, wenn $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist. Somit ergibt sich der obige Zusammenhang mit $V(A, 0)$.

Bemerkung 5.4.4 (inverse Matrizen von invertierbaren Matrizen)**.** Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar und $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $A \cdot B = I_n$ oder $B \cdot A = I_n$, so folgt bereits $B = A^{-1}$, denn: Wir betrachten den Fall, dass $A \cdot B = I_n$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
B &= (A^{-1} \cdot A) \cdot B && \text{(da } A \text{ invertierbar ist)}\\
&= A^{-1} \cdot (A \cdot B) && \text{(Assoziativität der Matrixmultiplikation)}\\
&= A^{-1} \cdot I_n && \text{(nach Voraussetzung)}\\
&= A^{-1}.
\end{aligned}$$

Analog verfährt man im Fall $B \cdot A = I_n$.

Rezept 5.4.5 (Berechnung von Inversen)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.
- *Gesucht* sei die inverse Matrix A^{-1}.
- *Rezept:* Man löse für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ das lineare Gleichungssystem

  Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = e_j$

  mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Da A invertierbar ist, ist jedes dieser Gleichungssysteme eindeutig lösbar, und man erhält das Inverse A^{-1}, indem man die Lösungen in die Spalten einer $n \times n$-Matrix schreibt.

Dies lässt sich geschickt organisieren, indem man diese n Gleichungssysteme simultan in der Form $(A \mid I_n)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Die rechte „erweiterte“ Seite ist dann die gesuchte inverse Matrix.

- *Begründung:* Da A invertierbar ist, genügt es, eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $A \cdot B = I_n$ zu finden (Bemerkung 5.4.4). Betrachtet man die Spalten dieser Gleichung, so sieht man, dass die Bestimmung einer solchen Matrix B zum Lösen der n linearen Gleichungssysteme

  Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = e_j$

  mit $j \in \{1, \dots, n\}$ äquivalent ist.

  Ist $Z \in \mathrm{GL}_n(K)$ ein Produkt von Elementarmatrizen, das A in die Zeilenstufenform I_n überführt, so gilt $Z \cdot A = I_n$. Führt man dieselben Zeilenumformungen „rechts“ in $(A \mid I_n)$ auf I_n aus, so erhält man für die rechte Seite
  $$Z \cdot I_n = Z.$$
  Aus der Gleichung $Z \cdot A = I_n$ folgt jedoch, dass $A = Z^{-1}$ bzw. $Z = A^{-1}$ ist (Bemerkung 5.4.4). Somit liefert das Gaußsche Eliminationsverfahren auf $(A \mid I_n)$ am Ende auf der rechten Seite A^{-1}.

Rezept 5.4.6 (Test auf Invertierbarkeit)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Antwort auf die Frage, ob A invertierbar ist.
- *Rezept:* Man überführt A mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens in Zeilenstufenform.
  - Ist die Anzahl der Stufen kleiner als n, so ist A nicht invertierbar.
  - Ist die Anzahl der Stufen gleich n, so ist A invertierbar.
- *Begründung:*
  - Wir gehen per Kontraposition vor: Sei A invertierbar. Dann ist $V(A, 0) \subset \{0\}$, denn: Ist $x \in K^n$ mit $A \cdot x = 0$, so folgt
    $$x = I_n \cdot x = (A^{-1} \cdot A) \cdot x = A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot 0 = 0.$$
    Also ist die Anzahl der Stufen gleich n (Proposition 5.1.1).
  - Sei umgekehrt die Anzahl der Stufen gleich n. Dann gibt es ein Produkt Z von Elementarmatrizen mit $Z \cdot A = I_n$. Da Z als Produkt von invertierbaren Matrizen invertierbar ist, folgt $A = Z^{-1}$ (Bemerkung 5.4.4), und damit $Z = A^{-1}$. Insbesondere ist A invertierbar.

Dieses Verfahren lässt sich gut in Rezept 5.4.5 integrieren.

Beispiel 5.4.7 (Berechnung der inversen Matrix)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Wir überprüfen, ob A invertierbar ist und bestimmen gegebenenfalls die inverse Matrix: Dazu führen wir das Gaußsche Eliminationsverfahren auf $(A \mid I_n)$ durch (Abbildung 5.5).

Nach Rezept 5.4.6 ist A invertierbar und mit Rezept 5.4.5 erhalten wir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -42 & 36 & 1 \\ 7 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sollte nach einer solchen Rechnung unbedingt auch die Probe machen (wenigstens für ausgewählte Zeilen und Spalten)!

Der Vollständigkeit halber geben wir noch Verfahren an, mit denen man Basen von gewissen Vektorräumen bestimmen kann. Der Einfachheit halber nehmen wir jeweils an, dass die Ausgangsdaten in einem der Standardvektorräume gegeben sind. Außerdem achten wir nicht unbedingt darauf, möglichst effiziente Verfahren anzugeben – es gibt also durchaus noch einige Optimierungsmöglichkeiten.

Rezept 5.4.8 (Auswahl einer Basis)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $v_1, \dots, v_n \in K^m$.
- *Gesucht* sei eine linear unabhängige Teilfamilie von $(v_1, \dots, v_n)$, die $\operatorname{Span}_K\{v_1, \dots, v_n\}$ erzeugt.
- *Rezept:* Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$ (in dieser Reihenfolge). Man wendet dann das Gaußsche Eliminationsverfahren auf A an. Seien $k_1, \dots, k_r$ die Indizes der Pivotspalten der entstehenden Matrix in Zeilenstufenform. Dann ist $(v_{k_1}, \dots, v_{k_r})$ eine linear unabhängige Teilfamilie, die $\operatorname{Span}_K\{v_1, \dots, v_n\}$ erzeugt.
- *Begründung:* Da das Gaußsche Eliminationsverfahren der Multiplikation (von links) mit einer invertierbaren Matrix entspricht und die Spalten $k_1, \dots, k_r$ der Zeilenstufenform linear unabhängig sind (nachrechnen!), ist leicht zu sehen, dass die Familie $(v_{k_1}, \dots, v_{k_r})$ linear unabhängig ist (nachrechnen!).

  Ähnlich kann man auch argumentieren, um einzusehen, dass die Gleichheit $\operatorname{Span}_K\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{Span}_K\{v_{k_1}, \dots, v_{k_r}\}$ gilt (nachrechnen!).

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3) \leftrightarrow (1)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3) - (2)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1) - 6 \cdot (2)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -42 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -42 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot (3)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -42 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 40 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1) + 42 \cdot (3)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -42 & 36 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(2) - 7 \cdot (3)} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -42 & 36 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Abbildung 5.5.: Invertieren der Matrix aus Beispiel 5.4.7.

Rezept 5.4.9 (Durchschnitt von Untervektorräumen).

- *Gegeben* sei ein Körper K, $m, n, r \in \mathbb{N}$ und endliche Mengen $\{v_1, \dots, v_r\}$, $\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \subset K^m$.
- *Gesucht* sei eine Basis von
$$U := \operatorname{Span}_K\{v_1, \dots, v_r\} \cap \operatorname{Span}_K\{v_{r+1}, \dots, v_n\}.$$
- *Rezept:* Sei $A := (v_1 \mid \cdots \mid v_r \mid v_{r+1} \mid \cdots \mid v_n) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Man bestimmt eine Basis $B = (u_1, \dots, u_s)$ von $V(A, 0) \subset K^n$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Man bildet dann die Menge $B' = \{\pi(u_j) \mid j \in \{1, \dots, s\}\} \subset K^{n-r}$, wobei $\pi \colon K^n \longrightarrow K^{n-r}$ die Projektion auf die letzten $n-r$ Koordinaten ist. Bildet man nun Linearkombinationen der $v_{r+1}, \dots, v_n$ mithilfe der Koeffizienten der Vektoren aus B', so erhält man ein (endliches) Erzeugendensystem von U. Nun wählt man mithilfe von Rezept 5.4.8 aus diesem Erzeugendensystem eine Basis von U aus.
- *Begründung:* Die Matrix A gehört zu dem linearen Gleichungssystem

  Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $\sum_{j=1}^r x_j \cdot v_j = \sum_{j=r+1}^n -x_j \cdot v_j$.

  Die linke Seite parametrisiert dabei $\operatorname{Span}_K\{v_1, \dots, v_r\}$ und die rechte Seite parametrisiert $\operatorname{Span}_K\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$. Die Lösungen dieses Gleichungssystems liefern also genau die Punkte in K^m, die in beiden Unterräumen gleichzeitig (d.h. in U) liegen. Man benötigt aber nur jeweils eine der beiden Linearkombinationen um die Punkte von U zu beschreiben; es genügen also z.B. die Koordinaten $r + 1, \dots, n$ von „x“.

Die Berechnung des Durchschnitts von Untervektorräumen ist zum Beispiel in der Computergraphik und im 3D-Druck essentiell.

5.5 Anwendung*: Algorithmische Lineare Algebra

Viele praktische Probleme lassen sich in Fragen über lineare Gleichungssysteme übersetzen (siehe z.B. Kapitel 3, 4, 7, 8). Allgemeiner lassen sich in der Linearen Algebra (fast) alle Fragestellungen durch entsprechende lineare Gleichungssysteme ausdrücken und lösen.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert ein algorithmisches Verfahren, um solche linearen Gleichungssysteme (exakt) zu lösen. In der Praxis muss jedoch genau abgewogen werden, ob ein Einsatz des Gaußschen Eliminationsverfahrens sinnvoll ist oder ob ein anderes Verfahren verwendet werden sollte (Caveat 5.3.6). Diese alternativen Verfahren beruhen teilweise auf denselben Grundideen wie das Gaußsche Eliminationsverfahren; es ist daher von Vorteil, das Gaußverfahren genau zu verstehen.

6

Lineare Abbildungen

Wie jede mathematische Theorie besitzt die lineare Algebra neben grundlegenden Objekten (den Vektorräumen) auch strukturerhaltende Morphismen zwischen solchen Objekten. Dies sind die sogenannten linearen Abbildungen.

Geometrisch gehören neben den durch die Skalarmultiplikation gegebenen Streckungen auch Spiegelungen, Rotationen und daraus zusammengesetzte Abbildungen zu den linearen Abbildungen. Lineare Abbildungen sind daher insbesondere in der Computergraphik zentral, um Objekte, Standorte des Betrachters, Kameraausrichtung, … zu beschreiben und zu transformieren.

Außerdem treten lineare Abbildungen als gut berechenbare Approximationsbausteine in der Analysis auf. Dies ist unter anderem bei der Modellierung von physikalischen Phänomenen in Computerspielen, im maschinellen Lernen und bei Optimierungsproblemen hilfreich.

Wir entwickeln zunächst die Grundbegriffe zu linearen Abbildungen und betrachten elementare Beispiele. In Kapitel 7 befassen wir uns systematisch mit dem allgemeinen Matrizenkalkül für lineare Abbildungen.

Überblick über dieses Kapitel.

6.1 Lineare Abbildungen

6.1.1 Definition

Mathematische Theorien bestehen aus

- *Objekten* und
- *Morphismen* (d.h. strukturerhaltenden „Abbildungen“).

Zum Beispiel betrachtet man in der Gruppentheorie neben Gruppen auch Gruppenhomomorphismen (Kapitel 1.2.2). Dieser Rahmen wird durch den sehr weitreichenden Begriff der Kategorie formalisiert [11]. Im Fall von Vektorräumen sind die Morphismen die linearen Abbildungen:

- *Algebraische Motivation für lineare Abbildungen:* Wir wollen Vektorräume (über demselben Grundkörper) miteinander vergleichen und in Beziehung setzen und betrachten daher Abbildungen zwischen Vektorräumen, die mit der linearen Struktur verträglich sind.
- *Geometrische Motivation für lineare Abbildungen:* Wir wollen geometrische Objekte nicht nur skalieren oder verschieben, sondern auch allgemeinere Transformationen wie zum Beipsiel Spiegelungen und Rotationen betrachten.

Definition 6.1.1 (lineare Abbildung)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Eine *K-lineare Abbildung von V nach W* ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Verträglichkeit mit der Addition.* Für alle $x, y \in V$ gilt
$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$
- *Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.* Für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$:
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

Ein *Isomorphismus* $f\colon V \longrightarrow W$ ist eine K-lineare Abbildung, für die es eine K-lineare Abbildung $g\colon W \longrightarrow V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ und $g \circ f = \mathrm{id}_V$ gibt.

Bemerkung 6.1.2. Wie im Fall von Gruppenhomomorphismen wäre es naheliegend, auch die Bedingung „$f(0) = 0$“ in der Definition zu fordern. Wir folgen hier der gebräuchlichen Konvention, dies in der Definition linearer Abbildungen nicht explizit zu fordern; wir wissen bereits, dass Verträglichkeit mit der Addition impliziert, dass 0 auf 0 abgebildet wird (Bemerkung 1.2.12).

Bemerkung 6.1.3. Isomorphismen besitzen *eindeutige* inverse Isomorphismen [8, Proposition 3.2.17].

6.1.2 Beispiele

Beispiel 6.1.4 (geometrische Beispiele)**.** Wichtige Beispiele für lineare Abbildungen sind Spiegelungen, Drehungen, Reskalierungen, ... (Abbildung 6.1; nachrechnen). Bei Spiegelungen, Rotationen, Streckungen und Scherungen (je mit Skalierungsfaktor ungleich 0) handelt es sich um Isomorphismen. Projektionen auf Quotienten und Inklusionen von Untervektorräumen sind im allgemeinen jedoch *keine* Isomorphismen.

Beispiel 6.1.5 (Dimensions-Upgrade)**.** Translationen sind im allgemeinen *keine* linearen Abbildungen (Beispiel 6.1.6). Indem man durch Hinzufügen einer „Dummy-Koordinate" zu einem größeren Vektorraum übergeht, kann man jedoch auch Translationen als lineare Abbildungen auffassen.

Wir illustrieren dies in einem 2D-Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + a \cdot w \\ y + b \cdot w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $\mathbb{R}$-linear (nachrechnen) und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In der (affinen) Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$ wirkt f also wie die Translation mit $(a, b)^\top$.

Für 3D geht man entsprechend zu 4D über, was jedoch komplizierter zu veranschaulichen ist.

Analog kann man mit demselben Trick auch Perspektivprojektionen als lineare Abbildungen auffassen. Daher wird in der Computergraphik oft mit 4D-Koordinaten gearbeitet, um 3D-Objekte und Transformationen zu beschreiben (Kapitel 6.3).

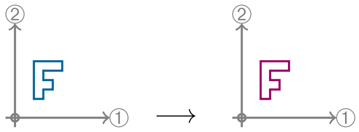
Beispiel 6.1.6 (nicht-lineare Abbildungen)**.**

- Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^{2024} \end{aligned}$$

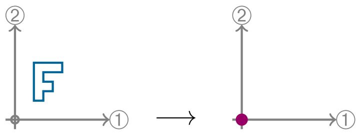
  ist *nicht* linear, denn z.B.: $(1+1)^{2024} = 2^{2024} \neq 2 = 1^{2024} + 1^{2024}$.

- Die Abbildung



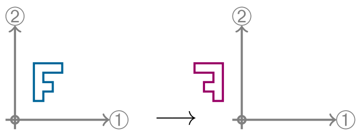
Identität

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



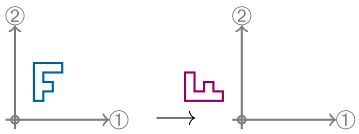
Nullabbildung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



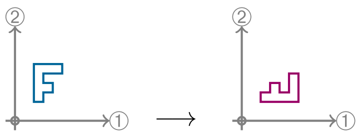
Spiegelung an $\mathbb{R} \cdot e_2$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



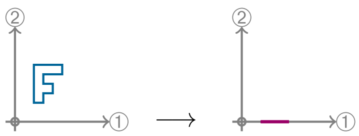
Rotation um $\pi/2$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



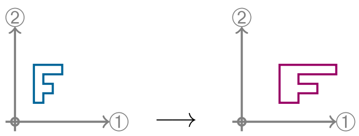
Koordinatenvertauschung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



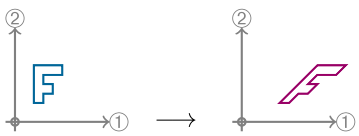
Zweite Koordinate ignorieren

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Unterschiedliche Skalierung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Scherung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung 6.1.: Beispiele für lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Der Zusammenhang mit den angegebenen Matrizen wird in Kapitel 6.1.3 erklärt (Beispiel 6.1.10).

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x + 2024\end{aligned}$$

ist *nicht* linear, denn z.B.: $(2\cdot 1)+2024 = 2026 \neq 5050 = 2\cdot(1+2024)$.

- Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

ist *nicht* linear, denn z.B.: für $e_1 + e_2$ erhält man 1 und nicht $0 + 0$.

Beispiel 6.1.7 (generische Beispiele)**.** Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann sind

$$\begin{aligned}
0\colon V &\longrightarrow W && \text{(Nullabbildung)}\\
v &\longmapsto 0,\\
\mathrm{id}_V\colon V &\longrightarrow V && \text{(Identitätsabbildung)}\\
v &\longmapsto v,\\
i_1\colon V &\longrightarrow V \oplus W && \text{(Inklusion des ersten Summanden)}\\
v &\longmapsto (v, 0),\\
p_1\colon V \oplus W &\longrightarrow V && \text{(Projektion auf den ersten Summanden)}\\
(v, w) &\longmapsto v,\\
i_U\colon U &\longrightarrow V && \text{(Inklusion)}\\
u &\longmapsto u,\\
\pi_U\colon V &\longrightarrow V/U && \text{(Projektion auf den Quotienten)}\\
v &\longmapsto v + U
\end{aligned}$$

jeweils K-lineare Abbildungen (nachrechnen).

Ausblick 6.1.8 (analytische Beispiele)**.** In der Analysis treten lineare Abbildungen einerseits bei Operationen wie Differentiation, Integration, Grenzwertbildung auf; andererseits werden sie auch verwendet, um kompliziertere Abbildungen lokal durch einfachere Abbildungen zu approximieren (s. Analysis I/II).

- Sei $\mathrm{Conv}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist die Grenzwertabbildung $\lim\colon \mathrm{Conv}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, aber die Supremumsabbildung $\sup\colon \mathrm{Conv}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *nicht* linear.
- Die Differentiationsabbildung

$$\begin{aligned}C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\\ f &\longmapsto f'\end{aligned}$$

und die Integrationsabbildung

$$\begin{aligned} C^0([0,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx \end{aligned}$$

sind $\mathbb{R}$-linear.

- Ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar im Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ (s. Analysis II), so ist die Ableitung $f'(x)$ von f an der Stelle x die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung(!) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die die Abbildung f an der Stelle x am „besten“ approximiert.

6.1.3 Lineare Abbildungen ↔ Matrizen

Lineare Abbildungen zwischen den Standardvektorräumen K^n lassen sich bequem durch Matrizen beschreiben: Sei K ein Körper und seien $m, \in \mathbb{N}$. Dann haben wir die folgende Korrespondenz:

Matrizen in $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$		**lineare Abbildungen** $K^n \longrightarrow K^m$
A	$\rightsquigarrow$	$(x \mapsto A\cdot x) =: L(A)$
$M(f) := \bigl(f(e_1) \bigm| \cdots \bigm| f(e_n)\bigr)$	$\leftsquigarrow$	f
(falls $n = m$) I_n	$\leftrightarrow$	Identitätsabbildung
Addition von Matrizen		Addition von linearen Abbildungen
Skalarmultiplikation von Matrizen		Skalarmultiplikation von Abbildungen
Multiplikation von Matrizen		Komposition von Abbildungen
(falls $n = m$) invertierbare Matrix		Isomorphismus

Indem man die Standardeinheitsvektoren einsetzt, erhält man mit Beispiel 3.2.11 die zentrale Einsicht, die dem Matrizenkalkül zugrundeliegt:

Die Spalten sind die Bilder der Standardeinheitsvektoren!

Denn es gilt: Für alle $A \in M_{m\times n}(K)$ und $j \in \{1,\dots,n\}$ ist

$$L(A)(e_j) = A_{*j}.$$

Wir führen die Tabelle detaillierter aus:

Proposition 6.1.9 (lineare Abbildungen aus Matrizen)**.** *Sei K ein Körper und seien $m, n, p \in \mathbb{N}$.*

1. *Ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so ist die folgende Abbildung K-linear:*

$$\begin{aligned} L(A)\colon K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto A\cdot x. \end{aligned}$$

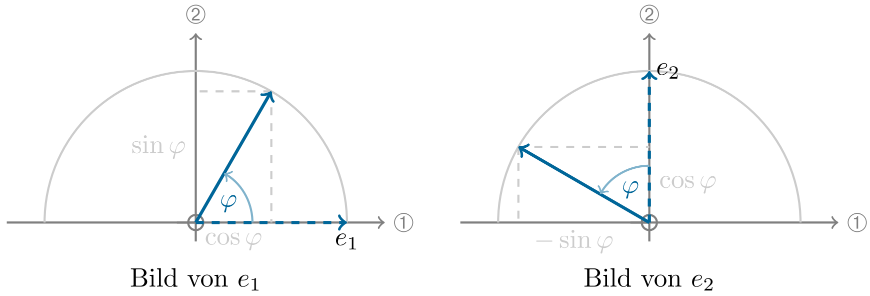


Abbildung 6.2.: Zusammenhang zwischen Rotation und Rotationsmatrix

2. *Es gilt* $L(I_n) = \mathrm{id}_{K^n} \colon K^n \longrightarrow K^n$.
3. *Für alle* $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ *und alle* $\lambda \in K$ *gilt*
$$L(A + B) = L(A) + L(B) \quad \textit{und} \quad L(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot L(A).$$
4. *Für alle* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(K)$ *gilt*
$$L(A) \circ L(B) = L(A \cdot B).$$

Beweis. Alle Aussagen folgen direkt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition 3.2.13). □

Der erste Teil dieser Proposition ist der Hauptgrund dafür, dass wir im Normalfall mit Spaltenvektoren arbeiten – denn dann können wir bequem durch Matrixmultiplikation von links lineare Abbildungen beschreiben.

Beispiel 6.1.10 (Matrizen für geometrische lineare Abbildungen)**.** In Abbildung 6.1 ist angegeben wie man die grundlegenden geometrischen Transformationen aus Beispiel 6.1.4 mithilfe von Matrizen beschreiben kann.

Durch Matrizen können wir Rotationen um 0 einfach beschreiben:

Beispiel 6.1.11 (Rotation)**.** Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und sei
$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $L(R(\varphi)) \colon R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Rotation um φ um den Nullpunkt (Abbildung 6.2). Insbesondere ist $L(R(2\cdot\pi)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Sind $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, so zeigen die Additionstheoreme (Anhang A.2, s. Analysis), dass
$$R(\varphi) \cdot R(\psi) = R(\varphi + \psi).$$

Umgekehrt können wir jede lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$ durch Matrizen beschreiben:

Proposition 6.1.12 (Matrizen aus linearen Abbildungen)**.** *Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$.*

1. *Sei $f\colon K^n \longrightarrow K^m$ linear. Dann gilt*
$$f = L\bigl(M(f)\bigr),$$
wobei $M(f) \in M_{m\times n}(K)$ die Matrix ist, deren Spalten $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sind. Insbesondere ist f durch das n-Tupel $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ eindeutig bestimmt.

2. *Ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so gilt*
$$M\bigl(L(A)\bigr) = A.$$

Beweis. *Zu 1.* Sei $x \in K^n$. Dann ist (nach Proposition 6.1.14 und der Definition der Matrixmultiplikation)

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(e_j) = M(f) \cdot x \\ &= L(M(f))(x). \end{aligned}$$

Zu 2. Es genügt zu zeigen, dass die beiden Matrizen dieselben Spalten haben. Sei also $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \bigl(M\bigl(L(A)\bigr)\bigr)_{*j} &= \bigl(L(A)\bigr)(e_j) = A \cdot e_j \\ &= A_{*j}. \end{aligned}$$ □

Außerdem hängen Isomorphismen und Invertierbarkeit von Matrizen hängen wie folgt zusammen:

Proposition 6.1.13 (Invertierbarkeit von linearen Abbildungen vs. Matrizen)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon K^n \longrightarrow K^n$ linear. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung $f\colon K^n \longrightarrow K^n$ ist ein Isomorphismus.*

2. *Die Matrix $M(f) \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar.*

Beweis. Dies folgt aus dem Zusammenhang zwischen Matrixmultiplikation und Komposition linearer Abbildungen (Proposition 6.1.9 und Proposition 6.1.12; nachrechnen).

Dabei ergibt sich im invertierbaren Fall auch $M(f)^{-1} = M(f^{-1})$. □

Wir werden in Kapitel 7 sehen, wie man lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen (und nicht nur zwischen den Standardvektorräumen) durch Matrizen beschreiben kann. Insbesondere werden wir dort erklären, wie man viele Fragen über lineare Abbildungen algorithmisch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren beantworten kann.

6.1.4 Rechnen mit linearen Abbildungen

Proposition 6.1.14 (Rechnen mit linearen Abbildungen). *Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen.*

1. *Dann ist $f(0) = 0$.*
2. *Ist $n \in \mathbb{N}$, ist $(v_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ eine Familie in V und ist $(\lambda_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ eine Familie in K, so gilt*

$$f\Bigl(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot v_j\Bigr) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot f(v_j).$$

Beweis. Zu 1. Dies folgt aus Bemerkung 1.2.12. Alternativ kann man wie folgt vorgehen: Da f linear ist, folgt

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0.$$

Zu 2. Dies folgt per Induktion über die Anzahl der Summanden aus der Definition von Linearität (nachrechnen). Für den Induktionsanfang verwendet man den ersten Teil. □

Proposition 6.1.15 (Vererbungseigenschaften von linearen Abbildungen). *Sei K ein Körper und seien V, W, X Vektorräume über K.*

1. *Ist $f\colon V \longrightarrow W$ linear und ist $\lambda \in K$, so ist auch $\lambda \cdot f\colon V \longrightarrow W$ linear.*
2. *Sind $f, g\colon V \longrightarrow W$ linear, so ist auch $f + g\colon V \longrightarrow W$ linear.*
3. *Sind $f\colon V \longrightarrow W$ und $g\colon W \longrightarrow X$ linear, so ist auch $g \circ f\colon V \longrightarrow X$ linear.*

Beweis. Man kann diese Eigenschaften direkt anhand der Definition von Linearität überprüfen (nachrechnen).

Zur Erinnerung (Beispiel 2.1.9):

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f\colon V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \lambda \cdot f(v), \\ f + g\colon V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto f(v) + g(v). \end{aligned}$$

□

6.2 Kern und Bild

Wir untersuchen Injektivität und Surjektivität von linearen Abbildungen genauer. Es stellt sich heraus, dass man mithilfe des Dimensionsbegriffs messen kann wie sehr eine lineare Abbildung injektiv oder surjektiv ist: Der „Kern“ misst (Nicht-)Injektivität, das „Bild“/der „Rang“ messen Surjektivität.

6.2.1 Kern und Bild

Wichtige Kenngrößen von linearen Abbildungen sind Kern, Bild und Rang:

Definition 6.2.1 (Kern, Bild, Rang)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann definiert man

- den *Kern von* f durch $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$;
- das *Bild von* f durch $\operatorname{im} f := \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$;
- den *Rang von* f durch $\operatorname{rg} f := \dim_K(\operatorname{im} f)$.

Bemerkung 6.2.2 (Kern und Bild sind Untervektorräume)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann ist $\ker f \subset V$ ein K-Untervektorraum von V und $\operatorname{im} f \subset W$ ist ein Untervektorraum von W. Dies folgt aus der Definition von Linearität und Proposition 2.2.3 (nachrechnen); dabei sind $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ wegen $f(0) = 0$ nicht-leer.

Beispiel 6.2.3. Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \ker f &= \boxed{?} \quad \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1\}) \text{ mit Basis } (e_1), \\ \operatorname{im} f &= \boxed{?} \quad \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_2\}) \text{ mit Basis } (e_2), \\ \operatorname{rg} f &= \boxed{?} \quad 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.2.4 (Kern und lineare Gleichungssysteme)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann folgt unmittelbar aus den Definitionen, dass:

- Ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so ist

$$V(A, 0) = \ker L(A).$$

- Ist $f\colon K^m \longrightarrow K^n$ linear, so ist

$$\ker f = V\bigl(M(f), 0\bigr).$$

Insbesondere können wir Kerne von K-linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ (bzw. Basen von Kernen) mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Kapitel 5) bestimmen.

6.2.2 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Injektivität von linearen Abbildungen lässt sich mithilfe des Kerns charakterisieren. Insbesondere misst die Dimension des Kerns wie wenig injektiv eine lineare Abbildung ist.

Proposition 6.2.5 (Injektivität und Kern). *Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann ist f genau dann injektiv, wenn* $\ker f = \{0\}$ *ist.*

Beweis. Sei $f\colon V \longrightarrow W$ injektiv. Dann ist $\ker f = \{0\}$, denn: Selbstverständlich ist $0 \in \ker f$. Sei umgekehrt $v \in \ker f$; dann ist $v = 0$, denn: Nach Definition des Kerns gilt

$$f(v) = 0 = f(0).$$

Da f injektiv ist, folgt $v = 0$.

Sei umgekehrt $\ker f = \{0\}$. Dann ist f injektiv, denn: Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Da f linear ist, erhalten wir

$$f(v - v') = f(v) - f(v') = 0,$$

und damit $v - v' \in \ker f = \{0\}$. Also ist $v - v' = 0$ bzw. $v = v'$. □

Surjektivität von linearen Abbildungen lässt sich (nach Definition) durch das Bild charakterisieren; der Rang misst also wie surjektiv eine lineare Abbildung ist.

Proposition 6.2.6 (Bijektivität vs. lineare Isomorphismen). *Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Die Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ ist bijektiv.*
3. *Es gilt* $\ker f = \{0\}$ *und* $\operatorname{im} f = W$.

Beweis. Nach Proposition 6.2.5 sind die Aussagen 2. und 3. äquivalent. Außerdem gilt „1. $\Longrightarrow$ 2.“ denn jeder Isomorphimus ist bijektiv [8, Proposition 3.2.17].

Es bleibt also noch „2. $\Longrightarrow$ 1.“ zu zeigen: Sei $f\colon V \longrightarrow W$ bijektiv. Somit ist f als Abbildung von Mengen invertierbar [8, Proposition 3.2.17]; sei $g\colon W \longrightarrow V$ die inverse Abbildung. Es genügt also nachzuweisen, dass g automatisch linear ist: Da f linear und g invers zu f ist, erhalten wir für alle $w, w' \in W$ und alle $\lambda \in K$, dass

$$\begin{aligned} g(\lambda \cdot w) &= g\bigl(\lambda \cdot f(g(w))\bigr) && (\text{da } f \circ g = \mathrm{id}_W) \\ &= g\bigl(f(\lambda \cdot g(w))\bigr) && (\text{da } f \text{ linear ist}) \\ &= \lambda \cdot g(w) && (\text{da } g \circ f = \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} g(w + w') &= g\bigl(f(g(w)) + f(g(w'))\bigr) = g\bigl(f(g(w) + g(w'))\bigr) \\ &= g(w) + g(w'). \end{aligned}$$ □

Anmerkung zum Lernen. Viele Quellen verwenden als Definition für Isomorphismen zwischen Vektorräumen die zweite Charakterisierung (d.h. „linear und bijektiv“). In der Praxis verwendet man tatsächlich meist die zweite oder dritte Charakterisierung. Konzeptionell gesehen trägt aber die Definition als „strukturerhaltend invertierbare strukturerhaltende Abbildung“ weiter.

6.2.3 Die Dimensionsformel

Satz 6.2.7 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei W ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f$$

bzw.

$$\operatorname{rg} f = \dim_K V - \dim_K \ker f.$$

Beweisskizze. Dieser Sachverhalt kann auf viele verschiedene Weisen gezeigt werden. Ein sehr direktes Argument ist: Sei B eine Basis von $\ker f \subset V$. Nach dem Ergänzungssatz können wir B mithilfe einer weiteren Familie B' zu einer Basis B'' von V ergänzen (Korollar 4.4.12). Nachrechnen zeigt, dass die Bildfamilie $f(B')$ eine Basis von $\operatorname{im} f$ ist. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim_K V &= \text{Länge von } B'' \\ &= \text{Länge von } B + \text{Länge von } B' \\ &= \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f. \end{aligned}$$ □

Korollar 6.2.8 (Isomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen). *Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen mit $\dim_K V = \dim_K W$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung $f : V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Die Abbildung $f : V \longrightarrow W$ ist bijektiv.*
3. *Die Abbildung f ist injektiv.*
4. *Es gilt $\dim_K \ker f = 0$.*
5. *Die Abbildung f ist surjektiv.*
6. *Es gilt $\operatorname{rg} f = \dim_K W$.*

Beweis.

- Aussagen 1. und 2. sind äquivalent nach Proposition 6.2.6.
- Aussagen 3. und 4. sind äquivalent nach Proposition 6.2.5.
- Aussagen 5. und 6. sind äquivalent nach Proposition 4.5.3.
- Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Korollar 6.2.7) ist

$$\dim_K W = \dim_K V = \dim_K \ker f + \operatorname{rg} f.$$

Dies liefert die Äquivalenz von 4., 6., und 2. □

Caveat 6.2.9. Injektive oder surjektive lineare Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen sind im allgemeinen *keine* Isomorphismen!

Satz 6.2.10 (Homomorphiesatz für lineare Abbildungen). *Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann ist*

$$\begin{aligned} \overline{f} \colon V/\ker f &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ v + \ker f &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

ein (wohldefinierter!) Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Nach Definition von $\ker f$ ist $\overline{f}$ wohldefiniert. Wegen Proposition 6.2.6 genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{im} \overline{f} = \operatorname{im} f$ und $\ker \overline{f} = \{0 + \ker f\}$ gilt:

- *Bild* von $\overline{f}$: Nach Konstruktion ist $\operatorname{im} \overline{f} = \operatorname{im} f$.
- *Kern* von $\overline{f}$: Es gilt

$$\begin{aligned} \ker \overline{f} &= \{v + \ker f \mid f(v) = 0\} \\ &= \{v + \ker f \mid v \in \ker f\} \\ &= \{0 + \ker f\}. \end{aligned}$$

□

6.3 Anwendung*: Computergraphik

In der Computergraphik werden in vielen Systemen „Transformationen“ (d.h. lineare Abbildungen) eingesetzt:

- Zur Beschreibung von 2D- oder 3D-Szenarien; insbesondere, um den Zusammenhang zwischen der Kamera und anderen Objekten zu spezifizieren.
- Zur Berechnung von 2D-Repräsentationen des Szenarios (Rendering); insbesondere, für die entsprechenden Perspektivprojektionen.
- Zur Durchführung von Transformationen auf Szenarien; zum Beispiel bei der Verschiebung/Rotation von Objekten oder der Kamera.

Daher verfügen Computergraphiksysteme über Mechanismen, um Transformationen zu spezifieren und zu modifizieren. Dabei werden häufig sowohl deklarative als auch Matrix-basierte Repräsentationen angeboten.

Wie in Beispiel 6.1.5 werden 3D-Szenarien gewöhnlich in 4D-linearer Algebra kodiert, um einen einheitlichen Rahmen für alle gewünschten Transformationen zu schaffen. Alle Berechnungen können dann via Matrizen und Matrixoperationen durchgeführt werden.

Literaturaufgabe (real unreal world)**.** Wählen Sie ein Computergraphiksystem aus (z.B. OpenGL [10], Unity [13], Unreal Engine [2]) und lesen Sie in der Dokumentation nach, wie dreidimensionale Objekte und Transformationen repräsentiert werden.

7

Der Matrizenkalkül für lineare Abbildungen

Wir wissen bereits, dass sich lineare Abbildungen vom Typ $K^n \longrightarrow K^m$ durch Matrizen beschreiben lassen. Allgemeiner lassen sich lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch Matrizen darstellen, indem man Basen im Start- und Zielraum wählt und die lineare Abbildung dann durch diese Basen ausdrückt.

Fragen über lineare Abbildungen übersetzen sich dann in entsprechende Fragen über Matrizen. Viele dieser Fragen können algorithmisch (z.B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren) beantwortet werden.

Der gesamte Matrizenkalkül für lineare Abbildungen beruht auf:

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

Wir beginnen mit etwas Theorie zu Basen und linearen Abbildungen und wenden diese dann auf den Matrizenkalkül an.

Die Darstellung von linearen Abbildungen bezüglich verschiedener Basen ist insbesondere in der Computergraphik und bei diversen anderen Anwendungen von Matrizen bzw. linearen Abbildungen relevant (Kapitel 8).

Überblick über dieses Kapitel.

7.1 Lineare Abbildungen und Basen

Lineare Abbildungen sind durch ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt; umgekehrt können wir durch Angabe von Werten auf einer Basis lineare Abbildungen konstruieren.

7.1.1 Die universelle Eigenschaft von Basen

Satz 7.1.1 (universelle Eigenschaft von Basen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein (endlich-dimensionaler) K-Vektorraum mit einer Basis $(v_i)_{i\in I}$ und sei W ein K-Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Abbildung $f\colon I \longrightarrow W$ genau eine K-lineare Abbildung $F\colon V \longrightarrow W$ mit*

$$\forall_{i\in I} \quad F(v_i) = f(i).$$

Beweis. Sei $f\colon I \longrightarrow W$ eine Abbildung.

- *Eindeutigkeit* von linearen Abbildungen $V \longrightarrow W$, die f fortsetzen: Seien $F, F'\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen mit

  $$\forall_{i\in I} \quad F(v_i) = f(i) = F'(v_i).$$

  Wir zeigen, dass dann $F = F'$ ist: Sei $v \in V$. Da $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V (und somit insbesondere erzeugend!) ist, gibt es eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit

  $$v = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i.$$

  Da F und F' linear sind, erhalten wir dann (Proposition 6.1.14)

  $$\begin{aligned} F(v) &= F\Bigl(\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i\Bigr) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot F(v_i) && \text{(? da } F \text{ linear ist)} \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot f(i) && \text{(? } F \text{ setzt } f \text{ fort)} \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot F'(v_i) = F'\Bigl(\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i\Bigr) && \text{(analog für } F'\text{)} \\ &= F'(v), \end{aligned}$$

  wie behauptet.

- *Existenz* einer linearen Abbildung $F\colon V \longrightarrow W$, die f fortsetzt: Sei $v \in V$. Da $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V ist, gibt es *genau eine* Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ in K mit
$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot v_i$$
(Bemerkung 4.4.3). Wir defineren dann
$$F(v) := \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot f(i) \in W.$$
Eine Rechnung zeigt, dass man auf diese Weise eine lineare Abbildung $F\colon V \longrightarrow W$ erhält (nachrechnen!). Nach Konstruktion gilt dabei $F(v_i) = f(i)$ für alle $i \in I$. □

Bemerkung 7.1.2 (universelle Eigenschaft als Diagramm)**.** Die obige universelle Eigenschaft von Basen lässt sich kurz und knapp im folgenden kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dashed, "\exists! F\ (\text{linear})"] & W \\
I \arrow[u, "i \mapsto v_i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei bedeutet $\exists!$ „es existiert genau ein“. Gegebene Abbildungen werden mit durchgezogenen Pfeilen dargestellt, die von der universellen Eigenschaft versprochenen Abbildungen mit gestrichelten Pfeilen.

Korollar 7.1.3. *Sei K ein Körper und seien V und W (endlich-dimensionale) Vektorräume, die Basen $B := (v_i)_{i \in I}$ bzw. $C := (w_i)_{i \in I}$ besitzen (mit derselben Indexmenge!). Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T_{B,C}\colon V \longrightarrow W$ mit*
$$\forall_{i \in I} \quad T_{B,C}(v_i) = w_i.$$
Die lineare Abbildung $T_{B,C}\colon V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen und $(T_{B,C})^{-1} = T_{C,B}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus der universellen Eigenschaft von Basen. □

7.1.2 Dimension und Isomorphismen

Insbesondere erhalten wir, dass die Dimension eine vollständige Isomorphieinvariante von Vektorräumen ist:

Korollar 7.1.4 (Invarianz der Dimension)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W (endlich-dimensionale) Vektorräume über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt* $V \cong_K W$*, d.h. es gibt einen Isomorphismus* $V \longrightarrow W$ *von* K*-Vektorräumen.*

2. *Es gilt* $\dim_K V = \dim_K W$.

Insbesondere folgt $V \cong_K K^{\dim_K V}$.

Beweis. *Zu* 2. $\Longrightarrow$ 1.. Sei $\dim_K V = \dim_K W$. Wir wählen Basen B bzw. C von V bzw. W. Dann ist $T_{B,C} \colon V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen (Korollar 7.1.3).

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2.. Es gelte umgekehrt $V \cong_K W$. Sei $f \colon V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus und sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann ist $C := (f(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von W, denn: Als Isomorphismus ist f bijektiv (Proposition 6.2.6).

- Da f surjektiv ist, ist C ein Erzeugendensystem von W (Übungsaufgabe).

- Da f als Isomorphismus injektiv ist, ist die Familie C linear unabhängig (Übungsaufgabe).

Da C und B nach Konstruktion dieselbe Länge besitzen, folgt

$$\dim_K V = \text{Länge von } B = \text{Länge von } C = \dim_K W,$$

wie behauptet. □

7.2 Darstellende Matrizen

Wir stellen lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch Matrizen dar, indem wir Basen des Start- und Zielraums wählen, diese Räume mithilfe dieser Basen mit den Standardvektorräumen identifizieren und dann die bereits bekannte Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ und Matrizen in $\mathrm{M}_{m \times n}(K)$ nutzen.

Wir erklären dies zunächst konzeptionell und dann in konkreten Schritten. Im Anschluss übersetzen wir typische Fragen über lineare Abbildungen in lineare Gleichungssysteme für darstellende Matrizen und betrachten Beispiele.

7.2.1 Darstellende Matrizen

Definition 7.2.1 (darstellende Matrix)**.** Sei K ein Körper und sei $f \colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen mit $n := \dim_K V$ und $m := \dim_K W$. Ist B eine Basis von V und C eine Basis von W, so definieren wir

$$f_{B,C} := T_{E_m,C}^{-1} \circ f \circ T_{E_n,B} \colon K^n \longrightarrow K^m$$

und
$$M_{B,C}(f) := M(f_{B,C}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K).$$
Dabei sind E_n bzw. E_m die Standardbasen von K^n bzw. K^m. Wir bezeichnen $M_{B,C}(f)$ als *(darstellende) Matrix zu f bezüglich der Basen B und C.*

Anmerkung zum Lernen. Diese Situation lässt sich durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulichen; statt der obigen Definition sollte man sich dieses Diagramm merken und daraus die obige Definition herleiten.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
K^n \arrow[u, "T_{E_n,B}"] \arrow[r, dashed, "f_{B,C}"'] & K^m \arrow[u, "T_{E_m,C}"']
\end{tikzcd}$$
$$\wr$$
$$M_{B,C}(f) := M(f_{B,C})$$

Man beachte dabei, dass die Abbildungen der Form $T_{X,Y}$ Isomorphismen sind (Korollar 7.1.3). Die Kommutativität des obigen Diagramms bedeutet eigentlich, dass
$$T_{E_m,C} \circ f_{B,C} = f \circ T_{E_n,B}$$
gilt. Da die „vertikalen" Abbildungen $T_{E_m,C}$ und $T_{E_n,B}$ Isomorphismen sind, ist dies aber äquivalent zu der definierenden Gleichung
$$f_{B,C} = T^{-1}_{E_m,C} \circ f \circ T_{E_n,B}$$
bzw.
$$f = T_{E_m,C} \circ f_{B,C} \circ T^{-1}_{E_n,B}.$$

Bemerkung 7.2.2 (lineare Abbildung $\longrightarrow$ darstellende Matrix)**.** In der Situation von Definition 7.2.1 gilt: Nach Konstruktion sind die Spalten von $M_{B,C}(f)$ die Bilder der Basisvektoren aus B unter f, ausgedrückt in der Basis C. Expliziter: Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $C = (w_1, \dots, w_m)$. Ist $k \in \{1, \dots, n\}$, so gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit
$$f(v_k) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot w_j.$$
Dann ist
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$
die k-te Spalte von $M_{B,C}(f)$. Kurz zusammengefasst:

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

Bemerkung 7.2.3 (darstellende Matrix $\longrightarrow$ lineare Abbildung)**.** Wie kann man in der Situation von Definition 7.2.1 die Abbildung f aus der darstellenden Matrix $M_{B,C}(f)$ zurückgewinnen? Für alle $v \in V$ gilt (nach dem obigen kommutativen Diagramm)

$$f(v) = T_{E_m,C}\bigl(M_{B,C}(f) \cdot (T^{-1}_{E_n,B}(v))\bigr).$$

Beispiel 7.2.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei B eine Basis von K^n. Dann schreiben wir $M_B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ für die Matrix, deren Spalten die (genau n) Vektoren aus B sind (in der durch B gegebenen Reihenfolge). Nach Konstruktion ist

$$M(T_{E_n,B}\colon K^n \longrightarrow K^n) = \boxed{?} \quad M_B,$$

denn: die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren. Mit der Verträglichkeit von Komposition und Matrixmultiplikation ergibt sich zudem

$$M(T^{-1}_{E_n,B}\colon K^n \longrightarrow K^n) = \boxed{?} \quad M(T_{E_n,B})^{-1} = M_B^{-1}.$$

Diese Notation ist für darstellende Matrizen und für Basiswechsel hilfreich.

Beispiel 7.2.5 (Basiswechselwunder)**.** Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und die zugehörige lineare Abbildung $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Wir stellen f bezüglich einer anderen Basis von $\mathbb{R}^2$ durch eine Matrix dar: Wir wählen die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ (sowohl im Start- als auch im Zielraum). Dann erhalten wir (mit Beispiel 7.2.4 und etwas Geduld beim Rechnen)

$$\begin{aligned}
M_{B,B}(f) &= \boxed{?} \quad M(T^{-1}_{E_2,B} \circ f \circ T_{E_2,B}) \\
&= \boxed{?} \quad M(T^{-1}_{E_2,B}) \cdot M_{E_n,E_n}(f) \cdot M(T_{E_2,B}) \\
&= \boxed{?} \quad M_B^{-1} \cdot A \cdot M_B \\
&= \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl einer Basis konnten wir in diesem Fall eine deutlich einfachere Darstellung unserer linearen Abbildung erreichen! Selbst für lineare Abbildungen zwischen den Standardvektorräumen ist es daher unerlässlich auch die Darstellung durch Matrizen bezüglich anderen Basen zu untersuchen. Dies wird in der Normalformentheorie genauer behandelt (Lineare Algebra II).

Caveat 7.2.6. Möchte man eine lineare Abbildung durch eine Matrix darstellen, so muss man zunächst Basen für den Start- und Zielraum wählen! Dabei ist folgendes zu beachten:

- Allgemeine Vektorräume haben *keine* „Standardbasis“.
- Darstellende Matrizen derselben linearen Abbildung bezüglich verschiedener Basen sind im allgemeinen verschieden.

Die entsprechenden Basen müssen also immer mit angegeben werden.

7.2.2 Kern

Bemerkung 7.2.7 (Bestimmung des Kerns)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Da $T_{E_n,B}\colon K^n \longrightarrow V$ und $T_{E_m,C}\colon K^m \longrightarrow W$ Isomorphismen von K-Vektorräumen sind, gilt (nachrechnen)

$$\begin{aligned}\ker f &= \bigl\{v \in V \bigm| f(v) = 0\bigr\}\\ &= T_{E_n,B}\bigl(\bigl\{v \in K^n \bigm| f_{B,C}(v) = 0\bigr\}\bigr)\\ &= T_{E_n,B}\bigl(V(M_{B,C}(f), 0)\bigr).\end{aligned}$$

Rezept 7.2.8 (Bestimmung des Kerns einer linearen Abbildung)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K und eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen.
- *Gesucht* sei eine Basis von $\ker f \subset V$.
- *Rezept:* Man wähle Basen B und C von V bzw. W und bestimme die darstellende Matrix $M_{B,C}(f)$ (im einfachsten Fall ist f bereits eine lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$ von der Form $L(A)$ mit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$). Dann bestimme man eine Basis D von $V(M_{B,C}(f), 0)$ wie in Rezept 5.4.2. Man bildet nun D mit $T_{E_{\dim_K V},B}$ nach V ab und erhält so eine Basis von $\ker f$.
- *Begründung:* Es gilt (Bemerkung 7.2.7)

  $$\ker f = T_{E_{\dim_K V},B}\bigl(V(M_{B,C}(0), 0)\bigr)$$

  und der Isomorphismus $T_{E_{\dim_K V},B}$ bildet Basen auf Basen ab.

7.2.3 Rang und Bild

Um Rang und Bild einer linearen Abbildung zu bestimmen, bietet es sich an, den Rangbegriff auf Matrizen zu erweitern:

Definition 7.2.9 (Rang einer Matrix)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Der *(Spalten)Rang* einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ ist

$$\operatorname{rg} A := \operatorname{rg} L(A) \in \mathbb{N}.$$

Proposition 7.2.10 (Spaltenrang)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} A &= \dim_K \operatorname{Span}_K(A_{*1}, \dots, A_{*n})\\ &= \textit{maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von } A\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichheit erhalten wir aus

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} A &= \dim_K \operatorname{im} L(A) && \text{(nach Definition von rg } A)\\ &= \dim_K \operatorname{Span}_K\bigl(L(A)(e_1), \dots, L(A)(e_n)\bigr) && \text{(nachrechnen)}\\ &= \dim_K \operatorname{Span}_K(A_{*1}, \dots, A_{*n}). && \text{(die Spalten \dots)}\end{aligned}$$

Wir wissen zudem, dass jede maximale linear unabhängige Teilfamilie des Erzeugendensystems $(A_{*1}, \dots, A_{*n})$ eine Basis von $\operatorname{im} L(A)$ ist ((Beweis von) Satz 4.4.5). Also ist $\operatorname{rg} A$ genau die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten $A_{*1}, \dots, A_{*n}$. Dies zeigt die zweite Gleichheit. □

Korollar 7.2.11 (Invertierbarkeit und Spaltenrang)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist invertierbar.*
2. *Es gilt $\operatorname{rg} A = n$.*
3. *Die Familie $(A_{*1}, \dots, A_{*n})$ der Spalten von A ist eine Basis von K^n.*
4. *Die Familie $(A_{*1}, \dots, A_{*n})$ der Spalten von A ist linear unabhängig.*

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. folgt aus Proposition 6.1.13 und Korollar 6.2.8. Dass die Aussagen 2., 3. und 4. äquivalent sind, folgt aus Proposition 7.2.10. □

Bemerkung 7.2.12 (Bestimmung des Rangs)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Da $T_{E_n,B}\colon K^n \longrightarrow V$ und $T_{E_m,C}\colon K^m \longrightarrow W$ Isomorphismen von K-Vektorräumen sind, gilt

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f_{B,C} = \operatorname{rg} M(f_{B,C}) = \operatorname{rg} M_{B,C}(f).$$

Rezept 7.2.13 (Bestimmung des Rangs einer linearen Abbildung)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K und eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen.
- *Gesucht* sei der Rang von f.
- *Rezept:* Man wähle Basen B und C von V bzw. W und bestimme die darstellende Matrix $M_{B,C}(f)$ (im einfachsten Fall ist f bereits eine lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$ von der Form $L(A)$ mit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$). Man überführt nun $M_{B,C}(f)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren in Zeilenstufenform, woran sich der Rang von $M_{B,C}(f)$, und somit auch von f, direkt ablesen lässt: Der Rang ist die Anzahl der Stufen.
- *Begründung:* Es gilt $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M_{B,C}(f)$ (Bemerkung 7.2.12). Der Rang bleibt unter elementaren Zeilenumformungen erhalten (da die Elementarmatrizen invertierbar sind) und der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform ist die Anzahl der Stufen (Proposition 5.1.1 und Satz 6.2.7; oder nachrechnen mithilfe von Proposition 7.2.10).

Bemerkung 7.2.14 (weitere Rezepte)**.** Analog können wir

- mithilfe von Rezept 5.4.6 lineare Abbildungen auf Invertierbarkeit testen und
- mithilfe von Rezept 5.4.8 eine Basis des Bildes einer linearen Abbildung bestimmen.

7.2.4 Ein Beispiel

Beispiel 7.2.15. Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + x_4 \\ 2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 4\cdot x_4 \\ 3\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - 4\cdot x_4 \end{pmatrix} = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

und möchten Kern, Rang und Bild von f bestimmen. Dazu verwenden wir Rezept 7.2.8, Rezept 7.2.13 und Bemerkung 7.2.14.

Wir wählen auf $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$ jeweils die Standardbasis und bezeichnen diese mit B bzw. C. Dann ist

$$M_{B,C}(f) = \boxed{?} \quad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir überführen $M_{B,C}(f)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren in Zeilenstufenform (Abbildung 7.1). Aus der Zeilenstufenform erhalten wir:

- Der Rang von f ist
$$\operatorname{rg} f = \boxed{?} \quad \operatorname{rg} \text{Zeilenstufenform} = 2.$$
- Eine Basis von $\ker f$ ist (Rückwärtsauflösen)
$$\boxed{?} \quad \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
- Eine Basis von $\operatorname{im} f$ ist (da die Stufen bei Index 1 und 3 liegen)
$$\boxed{?} \quad \big(f(e_1), f(e_3)\big) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

7.2.5 Basiswechsel

Was passiert, wenn wir lineare Abbildungen bezüglich unterschiedlichen Basen durch Matrizen darstellen? Die Nützlichkeit solcher Basiswechsel haben wir bereits in Beispiel 7.2.5 gesehen. Auch in den Anwendungen (z.B. in der Computergraphik oder in der Physik) bietet es sich an, geeignete Koordinatensysteme zu wählen.

Als erstes betrachten wir Basiswechselmatrizen, d.h. Matrizen die Koordinaten bezüglich einer Basis in Koordinaten bezüglich einer anderen Basis umrechnen:

Definition 7.2.16 (Basiswechselmatrix)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension n. Sind B und C Basen von V, so definieren wir die zugehörige *Basiswechselmatrix* durch
$$M_{B,C} := M_{B,C}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Man erhält die Koeffizienten von $M_{B,C}$ also, indem man die Elemente aus B bezüglich der Basis C darstellt und die entsprechenden Koeffizienten in die Spalten füllt.

Diese Basiswechselmatrizen sind tatsächlich invertierbar, da sie Matrizen zu Isomorphismen sind. Genauer gilt in der Situation der obigen Definition, dass $M_{B,C}^{-1} = M_{C,B}$ ist (nachrechnen).

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(2) - 2 \cdot (1)} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3) - 3 \cdot (1)} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Pivot?}} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -6 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-1/6 \cdot (2)} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3) + 7 \cdot (2)} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1) - 3 \cdot (2)} \quad \begin{array}{rrrr} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Abbildung 7.1.: Überführung von $M_{B,C}(f)$ aus Beispiel 7.2.15 in Zeilenstufenform

Beispiel 7.2.17. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sind B und C Basen von K^n, so gilt (nach Konstruktion)

$$M_{B,C} = M_C^{-1} \cdot M_B \quad \text{und} \quad M_{C,B} = (M_{B,C})^{-1} = M_B^{-1} \cdot M_C.$$

(Dies ist im allgemeinen *nicht* dasselbe wie $M(T_{B,C}) = M_C \cdot M_B^{-1}$.) Man beachte, dass in allgemeinen Vektorräumen eine Basis B *nicht* zu einer Ma-

$$
\begin{tikzcd}
B' & B & C & C' \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V \arrow[r, "f"] & W & W \arrow[l, "\mathrm{id}_W"'] \\
K^n \arrow[u, "T_{E_n,B'}"] \arrow[r, dashed, "(\mathrm{id}_V)_{B',B}"'] \arrow[rrr, dashed, bend right, "f_{B',C'}"'] & K^n \arrow[u, "T_{E_n,B}"'] \arrow[r, dashed, "f_{B,C}"'] & K^m \arrow[u, "T_{E_m,C}"'] & K^m \arrow[u, "E_{E_m,C'}"'] \arrow[l, dashed, "(\mathrm{id}_W)_{C',C}"]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 7.2.: Basiswechsel und darstellende Matrizen

trix M_B führt; man kann im allgemeinen nur den *Unterschied* zwischen zwei Basen B und C durch eine Matrix (nämlich $M_{B,C}$) beschreiben.

Proposition 7.2.18 (Basiswechsel und darstellende Matrizen)**.** *Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Seien B und B' Basen von V und seien C und C' Basen von W. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
M_{B',C'}(f) &= (M_{C',C})^{-1} \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B',B} \\
&= M_{C,C'} \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B',B}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach Definition der assoziierten Abbildungen bzw. Matrizen gilt (siehe auch Abbildung 7.2)

$$
\begin{aligned}
f_{B',C'} &= T_{E_m,C'}^{-1} \circ f \circ T_{E_n,B'} \\
&= (T_{E_m,C} \circ (\mathrm{id}_W)_{C',C})^{-1} \circ f \circ (T_{E_n,B} \circ (\mathrm{id}_V)_{B',B}) \\
&= ((\mathrm{id}_W)_{C',C})^{-1} \circ f_{B,C} \circ (\mathrm{id}_V)_{B',B}
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
M_{B',C'}(f) = (M_{C',C})^{-1} \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B',B}.
$$

Die alternative Darstellung ergibt sich dann daraus, dass $(M_{C',C})^{-1} = M_{C,C'}$ gilt. $\square$

7.3 Anwendung*: Computergraphik II

Koordinatensysteme in der Computergraphik korrespondieren zu Basen. Die Standard-Pipeline in der Computergraphik verbindet verschiedene Koordinatensysteme [10, Coordinate_Transformations] (Abbildung 7.3). Die Transformationen zwischen den jeweiligen Koordinaten können (meistens) als Basiswechselmatrizen aufgefasst werden.

model coordinates

↓ (transformed by model coordinates of parent objects)
(transformed by viewing coordinates/parameters)

eye coordinates

↓ (projection)

clip coordinates

↓ (normalisation)

normalised device coordinates

↓ (viewport transformation)

window coordinates

Abbildung 7.3.: Die Computergraphik-Pipeline in OpenGL

Weitere Anwendungen von Basiswechseln betrachten wir in Kapitel 8.

8

Matrix Powers!

Potenzen von Matrizen treten in vielen Anwendungsproblemen auf. Wir stellen zwei solcher Probleme vor und erklären, wie man diese mithilfe von linearer Algebra lösen kann:

- Wie kann man effizient Wege in Graphen zählen/finden?
- Wie kann man lineare Rekursionen durch geschlossene Formeln ersetzen?

In beiden Fällen können wir das Problem auf die Berechnung von Potenzen von Matrizen zurückführen. Ideen zur Berechnung von Potenzen von Matrizen und Konsequenzen davon behandeln wir in Kapitel 8.3.

Überblick über dieses Kapitel.

8.1 Anwendung: Wege in Graphen

Problem 8.1.1.

- Wie kann man in einem endlichen Graphen herausfinden, ob/wie viele Wege gegebener Länge es zwischen zwei gegebenen Knoten gibt?
- Wie kann man herausfinden, ob ein gegebener endlicher Graph einen Kreis der Länge 3 enthält?

In beiden Fällen suchen wir „effiziente" algorithmische Lösungen. Die Komplexität wird dabei zumeist in Relation zur Anzahl der Knoten/Kanten ausgedrückt. Wir gehen hier nicht im Detail auf die Komplexitätsanalyse ein, sondern machen nur grobe Angaben dazu.

Um Problem 8.1.1 zu lösen, verwenden wir Adjazenzmatrizen und stellen eine Verbindung zu Potenzen von Matrizen her.

8.1.1 Wiederholung: Begriffe aus der Graphentheorie

Graphen sind kombinatorische Strukturen, die das (Nicht-)Vorhandensein von Beziehungen („Kanten") zwischen Objekten („Knoten") modellieren [8, Kapitel 5]. Insbesondere modellieren Graphen Netzwerke aller Art: z.B. Kontaktgraphen, Verlinkung zwischen Webseiten, Verkehrswege, ... Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber nur ungerichtete Graphen; analog könnte man auch bei gerichteten Graphen vorgehen.

Definition 8.1.2 (ungerichteter Graph)**.** Ein *(ungerichteter) Graph* ist ein Paar (V, E), bestehend aus einer Menge V und einer Menge E mit $E \subset V[2]$, wobei

$$V[2] := \bigl\{\{v, w\} \bigm| v, w \in V,\ v \neq w\bigr\}$$

die Menge der zwei-elementigen Teilmengen von V bezeichnet. Die Elemente von V heißen *Knoten*, die Elemente von E heißen *Kanten*. Sind $v, w \in V$, so ist v ist *(in X) benachbart* zu w, wenn $\{v, w\} \in E$ ist. Ein Graph (V, E) ist *endlich*, wenn V und E endliche Mengen sind.

Definition 8.1.3 (Weg, zusammenhängend)**.** Sei $X = (V, E)$ ein Graph.

- Ein *verallgemeinerter Weg in X* ist eine Folge $(v_0, \dots, v_n)$ von Knoten in V mit $n \in \mathbb{N}$ und

  $$\forall_{j \in \{0,\dots,n-1\}} \quad \{v_j, v_{j+1}\} \in E.$$

  In diesem Fall ist n die *Länge des Weges* $(v_0, \dots, v_n)$ und wir sagen, dass $(v_0, \dots, v_n)$ ein verallgemeinerter Weg von v_0 nach v_n ist.

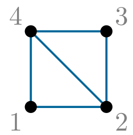


Abbildung 8.1.: Der Graph aus Beispiel 8.1.5.

Sind die Knoten des verallgemeinerten Weges paarweise verschieden, so sprechen wir von einem *Weg*.

- Ein *Kreis in* X ist ein Weg $(v_0, \dots, v_n)$ der Länge $n \geq 2$, der zusätzlich $\{v_n, v_0\} \in E$ erfüllt. Die *Länge* eines solchen Kreises ist $n + 1$.

8.1.2 Wege zählen über Adjazenzmatrizen

Die kombinatorische Struktur eines Graphen können wir in der Adjazenzmatrix kodieren; umgekehrt können wir den Graphen aus seiner Adjazenzmatrix rekonstruieren. Adjazenzmatrizen werden daher auch bei der Implementierung von Graphen verwendet [8, Kapitel 5.5]. Die grundlegende Beobachtung der algebraischen Graphentheorie ist, dass die Potenzen der Adjazenzmatrix die Anzahlen der verallgemeinerten Wege enthalten.

Definition 8.1.4 (Adjazenzmatrix)**.** Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph; um die Notation zu vereinfachen, sei $V = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die *Adjazenzmatrix von* X ist

$$A(X) := (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

wobei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beispiel 8.1.5. Wir betrachten den Graphen $X = (V, E)$ mit (s. Abbildung 8.1)

$$\begin{aligned} V &:= \{1, 2, 3, 4\} \\ E &:= \bigl\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\bigr\}. \end{aligned}$$

Als Adjazenzmatrix erhalten wir:

$$A(X) = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Proposition 8.1.6 (Potenzen von Adjazenzmatrizen). *Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Es ist $(A(X)^k)_{i,j} \in \mathbb{N}$ und $(A(X)^k)_{i,j}$ ist die Anzahl der verallgemeinerten Wege der Länge genau k von i nach j in X.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über k:

- *Induktionsanfang.* Einerseits ist $A(X)^0 = I_n = (\delta_{ij})_{i,j}$. Andererseits gibt es von einem Knoten i zu einem Knoten j genau dann einen verallgemeinerten Weg der Länge 0, wenn $i = j$ ist. Dies zeigt die Behauptung für $k = 0$.

- *Induktionsvoraussetzung.* Sei $k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung sei für k bereits gezeigt.

- *Induktionsschritt.* Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $k + 1$ gilt: Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nach Definition der Matrixmultiplikation ergibt sich einerseits

$$\begin{aligned} \big(A(X)^{k+1}\big)_{ij} &= \big(A(X)^k \cdot A(X)\big)_{ij} && \text{(induktive Definition von Potenzen)} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \big(A(X)^k\big)_{ir} \cdot \big(A(X)\big)_{rj}. && \text{(Definition der Matrixmultiplikation)} \end{aligned}$$

  Andererseits erhalten wir die Anzahl aller verallgemeinerten Wege in X der Länge k von i nach j, indem wir für jeden Knoten $r \in \{1, \dots, n\}$

  - die Anzahl aller verallgemeeinerten Wege der Länge k in X von i nach r bestimmen (nach Induktionsvoraussetzung ist diese Anzahl genau $(A(X)^k)_{ir}$,
  - die Anzahl aller verallgemeinerten Wege in X der Länge 1 von r nach j bestimmen (d.h. feststellen, ob $\{r, j\}$ eine Kante von X ist oder nicht),
  - dann diese beiden Zahlen multiplizieren
  - und anschließend all diese Produkte aufsummieren.

  Dies entspricht genau der obigen Darstellung von $(A(X)^{k+1})_{ij}$.

Mit derselben Induktion sehen wir auch, dass alle Koeffizienten von $A(X)^k$ natürliche Zahlen sind. ☐

Beispiel 8.1.7. Für die Adjazenzmatrix aus Beispiel 8.1.5 erhalten wir

$$A(X)^2 = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(X)^3 = \boxed{?} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Proposition 8.1.6 gibt es also in X genau ? fünf verallgemeinerte Wege der Länge 3 von 1 nach 2; diese sind:

$$(1,2,1,2), \quad (1,2,3,2), \quad (1,2,4,2), \quad (1,4,1,2), \quad (1,4,2,3).$$

Außerdem gibt es in X genau

- ? zwei Kreise in X der Länge 3, die in 1 beginnen, nämlich
$$(1,2,4), \quad (1,4,2);$$
- ? vier Kreise in X der Länge 3, die in 2 beginnen, nämlich
$$(2,3,4), \quad (2,4,3), \quad (2,4,1), \quad (2,1,4).$$

Korollar 8.1.8 (Kreise der Länge 3 in Graphen). *Sei X ein endlicher Graph mit Knotenmenge $\{1,\dots,n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Der Graph X enthält einen Kreis der Länge 3.*
2. *Es gibt ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $(A(X)^3)_{ii} \neq 0$.*
3. *Es gibt $i,j \in \{1,\dots,n\}$ mit*
$$\bigl(A(X)\bigr)_{ij} \neq 0 \quad \textit{und} \quad \bigl(A(X)^2\bigr)_{ij} \neq 0.$$

Beweis. Wir verwenden den Zusammenhang zwischen der Existenz von Wegen und nicht-verschwindenden Koeffizienten in Potenzen der Adjazenzmatrix (Proposition 8.1.6):

Zu 1. $\Longleftrightarrow$ 2.. Der Graph X enthält genau dann einen Kreis der Länge 3, wenn es einen verallgemeinerten Weg der Länge 3 von einem der Knoten von X zu sich selbst gibt (nachrechnen!). Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ergibt sich somit aus Proposition 8.1.6.

Zu 1. $\Longleftrightarrow$ 3.. Der Graph X enthält genau dann einen Kreis der Länge 3, wenn es Knoten $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gibt, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzen (nachrechnen!):

- Die Knoten i und j sind in X benachbart und
- es gibt zudem in X einen verallgemeinerten Weg der Länge 2 von i nach j.

Somit folgt die Äquivalenz der ersten und der dritten Aussage aus Proposition 8.1.6. □

Bemerkung 8.1.9. Der naive Algorithmus, um festzustellen, ob ein Graph mit genau n Knoten einen Kreis der Länge 3 enthält, benötigt im schlechtesten Fall eine Anzahl von Schritten, die kubisch in n wächst.

Verwendet man die dritte Charakterisierung aus Korollar 8.1.8, so erhält man eine ähnliche Komplexität, da die naive Multiplikation von $n \times n$-Matrizen eine Anzahl von arithmetischen Operationen benötigt, die kubisch in n wächst. Es gibt jedoch effizientere Algorithmen zur Matrixmultiplikation (Ausblick 8.3.1), wodurch sich die Worst-Case-Komplexität signifikant verbessern lässt.

Bemerkung 8.1.10 (die Anzahl der Kreise der Länge 3)**.** Sei X ein endlicher Graph mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Korollar 8.1.8 kann man auch zeigen, dass die Anzahl der Kreise der Länge 3 in X genau

$$\sum_{i=1}^{n} \bigl(A(X)^3\bigr)_{ii}$$

ist. Die Summe der Diagonaleinträge einer quadratischen Matrix wird auch als *Spur* der Matrix bezeichnet. Die obige Anzahl ist also genau die Spur von $A(X)^3$.

Bemerkung 8.1.11. Wenn man sich wie in Korollar 8.1.8 „nur“ für die Existenz von Wegen/Kreisen einer bestimmten Länge interessiert, kann man statt Matrizen mit ganzzahligen oder reellwertigen Koeffizienten auch mit Matrizen mit Werten in $\mathbb{B} := \{0, 1\}$ rechnen, wobei man die Matrixmultiplikation jedoch bezüglich der folgenden Addition und Multiplikation auf $\mathbb{B}$ durchführt:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

Dabei entspricht $1 \in \mathbb{B}$ der Existenz eines Weges und $0 \in \mathbb{B}$ der Nicht-Existenz. Analog zu Proposition 8.1.6 erhalten wir dann: Ist X ein endlicher Graph mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und sind $k \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, so gilt: Es gibt in X genau dann einen Weg der Länge k von i nach j, wenn der Koeffizient $(A(X; \mathbb{B})^k)_{ij} = 1$ ist. Dabei ist $A(X; \mathbb{B})$ die über $\mathbb{B}$ definierte Adjazenzmatrix und die Potenz $A(X; \mathbb{B})^k$ ist bezüglich der obigen algebraischen Operationen gebildet.

Die obige algebraische Struktur auf $\mathbb{B}$ stimmt *nicht* mit der Struktur auf $\mathbb{F}_2$ überein! Bei $\mathbb{B}$ handelt es sich *nicht* um einen Körper.

Interpretiert man (wie z.B. in C oder Python) 0 als f und 1 als w, so entspricht die obige Operation

- „ $\cdot$ “ der logischen Operation $\wedge$ und
- „$+$“ der logischen Operation $\vee$.

8.2 Anwendung: Auflösung linearer Rekursionen

Problem 8.2.1. Wie können wir lineare Rekursionen durch geschlossene Formeln ersetzen?

Um Problem 8.2.1 zu lösen, beschreiben wir lineare Rekursionen durch Potenzen von Matrizen.

8.2.1 Wiederholung: Die Fibonacci-Folge

Definition 8.2.2 (Fibonacci-Zahlen)**.** Die Funktion $F\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} F(0) &:= 1 \\ F(1) &:= 1 \\ F(n+2) &:= 1 \cdot F(n) + 1 \cdot F(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ist $n \in \mathbb{N}$, so wird $F(n)$ als *n-te Fibonacci-Zahl* bezeichnet.

Beispiel 8.2.3 (die ersten Fibonacci-Zahlen)**.** Mit der Rekursion aus Definition 8.2.2 erhalten wir für die ersten Werte:

$$\begin{aligned} &F(0) = 1, \quad F(1) = 1, \quad F(2) = \boxed{?}\ \ 2, \quad F(3) = \boxed{?}\ \ 3, \\ &F(4) = \boxed{?}\ \ 5, \quad F(5) = \boxed{?}\ \ 8, \quad F(6) = \boxed{?}\ \ 13, \quad \dots \end{aligned}$$

Wir können analog rekursiv viele weitere Werte berechnen. Es stellt sich aber die Frage, ob es nicht eine Möglichkeit gibt, die rekursive Beschreibung durch eine geschlossene Formel zu ersetzen. Erstaunlicherweise verwendet die folgende geschlossene Formel nicht nur natürliche Zahlen (obwohl alle Fibonacci-Zahlen natürliche Zahlen sind!), sondern auch den goldenen Schnitt:

Definition 8.2.4 (goldener Schnitt)**.** Der *goldene Schnitt* ist

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Außerdem schreiben wir $\overline{\varphi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Proposition 8.2.5 (eine geschlossene Darstellung der Fibonacci-Zahlen; [8, Proposition 4.3.6])**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (in $\mathbb{R}$)*

$$F(n) = \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

8.2.2 Lineare Rekursionen über Matrizen

Beispiel 8.2.6 (Fibonacci-Zahlen und Potenzen von Matrizen)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot F(n+1) + 1 \cdot F(n) \\ 1 \cdot F(n+1) \end{pmatrix} && \text{(Definition der Matrixmultiplikation)} \\ &= \begin{pmatrix} F(n+2) \\ F(n) \end{pmatrix}. && \text{(? Fibonacci-Rekursion)} \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir somit (nachrechnen!), dass

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} F(1) \\ F(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix}.$$

Eine geschlossene Formel für die Potenz A^n liefert daher auch eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahl $F(n)$ bzw. $F(n+1)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach der obigen Gleichung

$$F(n) = (A^n)_{21} + (A^n)_{22}.$$

Beispiel 8.2.7. Analog können wir bei allen linearen Rekursionen verfahren, z.B.: Die Funktion $F' \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} F'(0) &:= 1 \\ F'(1) &:= 1 \\ F'(2) &:= 2 \\ F'(n+3) &:= 4 \cdot F'(n) + 1 \cdot F'(n+1) + 1 \cdot F'(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Induktiv folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass (nachrechnen!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'(n+2) \\ F'(n+1) \\ F'(n) \end{pmatrix},$$

woraus sich wieder eine Formel für $F'(n)$ in den Koeffizienten der Matrixpotenz ergibt (wobei A' die obige Matrix bezeichnet):

$$F'(n) = 2 \cdot (A'^n)_{31} + (A'^n)_{32} + (A'^n)_{33}.$$

8.3 Berechnung von Potenzen von Matrizen

Wir haben das Zählen von Wegen in Graphen (Kapitel 8.1) und das bestimmen geschlossener Formeln linearer Rekursionen (Kapitel 8.2) auf das Berechnen von Potenzen von Matrizen zurückgeführt. Es stellt sich daher die Frage, wie man Matrizen effizient potenzieren kann bzw. ob man geschlossene Formeln für Potenzen von Matrizen finden kann. Wir beschreiben im folgenden sowohl das induktive Potenzieren von Matrizen als auch das Potenzieren mithilfe von Normalformen. Diese Methoden profitieren zusätzlich jeweils noch von einer schnellen Matrixmultiplikation:

Ausblick 8.3.1 (schnelle Matrixmultiplikation)**.** Die Anzahl der arithmetischen Operationen, die nötig sind, um das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen zu berechnen, wächst bei einer „naiven" Umsetzung anhand der Definition der Matrixmultiplikation ungefähr kubisch in n.

Dies lässt sich deutlich verbessern: Strassen [12] hat einen Algorithmus entwickelt, bei dem die Anzahl der nötigen arithmetischen Operationen nur in der Größen ordnung $n^{\log_2 7}$ wächst; die Grundidee ist dabei eine rekursive (logarithmische) Aufteilung der Matrizen in kleinere Matrizen, für die er eine geschickte Methode zur Multiplikation angibt (s. Algorithmen und Datenstrukturen). Mittlerweile gibt es weitere Verfahren, die noch effizienter sind.

8.3.1 Induktives Potenzieren

Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

Lineares Potenzieren. Für $k \in \mathbb{N}$ können wir die Potenz A^k rekursiv gemäß der Definition von Potenzen berechnen:

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ A^{k+1} &= A^k \cdot A \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Dies erfordert bei der Berechnung von A^k ungefähr k Multiplikationen von $n \times n$-Matrizen. Die Anzahl der Matrixmultiplikationen ist somit linear im Exponenten.

Logarithmisches Potenzieren. Wir können die Anzahl der Matrixmultiplikationen mit dem Standardbinärverfahren auf ein logarithmisches Wachstum im Exponenten senken: Dazu stellen wir $k \in \mathbb{N}_{>0}$ in seiner Binärdarstellung dar, d.h. wir bestimmen $r \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_r \in \{0, 1\}$ mit $a_r \neq 0$ und

$$k = \sum_{j=0}^{r} a_j \cdot 2^j.$$

Insbesondere ist $r \leq \log_2 k$. Dann gilt

$$A^k = A^{\sum_{j=0}^{r} a_j \cdot 2^j} = \prod_{j=0}^{r} A^{a_j \cdot 2^j}.$$

Die Menge $\{A^{2^0}, \dots, A^{2^r}\}$ der Potenzen kann mit insgesamt r Matrixmultiplikationen rekursiv berechnet werden, denn für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$A^{2^{j+1}} = A^{2^j + 2^j} = A^{2^j} \cdot A^{2^j}.$$

Insgesamt können wir daher A^k mit höchstens $r + r = 2 \cdot r \leq 2 \cdot \log_2 k$ Matrixmultiplikationen bestimmen.

8.3.2 Potenzieren über Normalformen

Ein anderer Ansatz zum Potenzieren von Matrizen beruht auf Normalformen von Matrizen und der folgenden Beobachtung:

Proposition 8.3.2 (Konjugationstrick). *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann gilt für alle invertierbaren Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(K)$:*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad (S^{-1} \cdot A \cdot S)^k = S^{-1} \cdot A^k \cdot S.$$

Beweis. Dies folgt per vollständiger Induktion über den Exponenten (Übungsaufgabe). □

Korollar 8.3.3 (Konjugationstrick und Basiswechselwunder). *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Es gebe außerdem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit*

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k. \end{pmatrix} \cdot S^{-1}.$$

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}
A^k &= S \cdot S^{-1} \cdot A^k \cdot S \cdot S^{-1} \\
&= S \cdot (S^{-1} \cdot A \cdot S)^k \cdot S^{-1} && \text{(Proposition 8.3.2)} \\
&= S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n. \end{pmatrix}^k \cdot S^{-1} && \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k. \end{pmatrix} \cdot S^{-1}, && \text{(nachrechnen)}
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Ausblick 8.3.4 (Normalformen)**.** Nicht alle quadratischen Matrizen lassen sich wie in Korollar 8.3.3 in Diagonalform überführen! Es gibt jedoch über vielen Grundkörpern allgemeine „einfache“ Normalformen bzw. praktikable Kriterien für Diagonalisierbarkeit und algorithmische Verfahren zur Bestimmung von Normalformen (!). Dies wird in der Linearen Algebra II genauer behandelt (Eigenwerte/-vektoren, Diagonalisierbarkeit, Jordansche Normalform).

Beispiel 8.3.5 (Fibonacci-Zahlen)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

aus der Matrixdarstellung der Fibonacci-Zahlen (Beispiel 8.2.6). Sei

$$S := \begin{pmatrix} \varphi & \overline{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann ist S invertierbar und (nachrechnen!)

$$S^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Mit Korollar 8.3.3 erhalten wir somit (nachrechnen!)

$$A^n = S \cdot \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}^n \cdot S^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} & \overline{\varphi}^{n+1} \\ \varphi^n & \overline{\varphi}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und daraus (wie in Beispiel 8.2.6) die geschlossene Formel

$$F(n) = (A^n)_{21} + (A^n)_{22} = \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

für die Fibonacci-Zahlen. Diese Formel stimmt mit der Formel aus Proposition 8.2.5 überein; sobald man weiß, wie man S bestimmen kann (s. Lineare Algebra II), kann man also eine solche Formel herleiten. Analog erhält man geschlossene Formeln für jede lineare Rekursion.

Beispiel 8.3.6 (Wege zählen)**.** Wir betrachten den Graphen aus Beispiel 8.1.5. Sei

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3+\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}} & \frac{-3+\sqrt{17}}{-5+\sqrt{17}} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3+\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}} & \frac{-3+\sqrt{17}}{-5+\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Dann ist S invertierbar und (nachrechnen!)

$$S^{-1} \cdot A(X) \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\lambda := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{17}) \quad \text{und} \quad \overline{\lambda} := \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{17}).$$

Mit Korollar 8.3.3 können wir daraus eine geschlossene Formel für $A(X)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ herleiten. Insbesondere liefert dies geschlossene Formeln für die Anzahlen der verallgemeinerten Wege der Länge n zwischen je zwei Knoten in X (mithilfe von Proposition 8.1.6).

Ausblick 8.3.7 (Spektraltheorie von Graphen)**.** Proposition 8.1.6 und Korollar 8.3.3 bilden den Anfang der algebraischen Graphentheorie [3].

Ähnliche Überlegungen sind zum Beispiel auch die Grundlage für den Page-Rank-Algorithmus, der ein zentraler Bestandteil der Aufbereitung von Google-Suchergebnissen ist [4].

Ausblick 8.3.8 (Lösung linearer Differentialgleichungssysteme)**.** Ein Verfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungssyteme nutzt Normalformen von Matrizen und den Konjugationstrick (s. Analysis II).

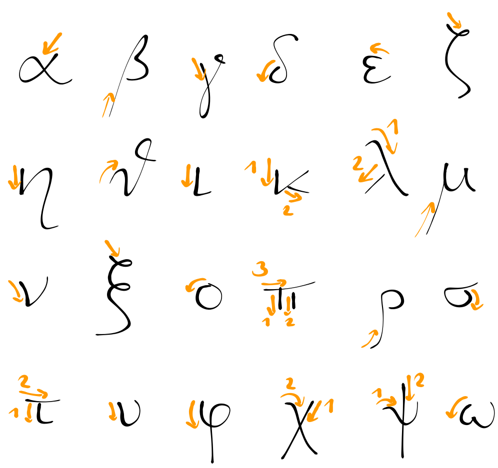
A

Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1 Das griechische Alphabet

Symbol		Name	TeX-/LaTeX-Kommando	
A	α	alpha	A	\alpha
B	β	beta	B	\beta
Γ	γ	gamma	\Gamma	\gamma
Δ	δ	delta	\Delta	\delta
E	ε, ϵ	epsilon	E	\varepsilon , \epsilon
Z	ζ	zeta	Z	\zeta
H	η	eta	H	\eta
Θ	ϑ, θ	theta	\Theta	\vartheta , \theta
I	ι	iota	I	\iota
K	κ	kappa	K	\kappa
Λ	λ	lambda	\Lambda	\lambda
M	μ	my	M	\mu
N	ν	ny	N	\nu
Ξ	ξ	xi	\Xi	\xi
O	o	omikron	O	o
Π	π	pi	\Pi	\pi
P	ϱ, ρ	rho	P	\varrho , \rho
Σ	σ, ς	sigma	\Sigma	\sigma , \varsigma
T	τ	tau	T	\tau
Y	υ	ypsilon	Y	\upsilon
Φ	φ, ϕ	phi	\Phi	\varphi , \phi
X	χ	chi	X	\chi
Ψ	ψ	psi	\Psi	\psi
Ω	ω	omega	\Omega	\omega



A.2 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und π kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (s. Analysis I/II).

Definition A.2.1 (Sinus, Kosinus)**.** Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned}\cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}\\ \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}.\end{aligned}$$

Graphische Darstellung. Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von cos bzw. sin in Abbildung A.1.

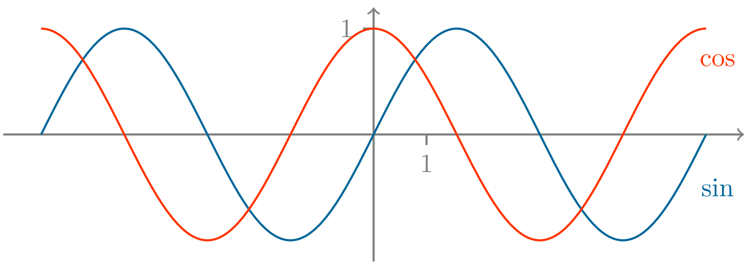


Abbildung A.1.: Graphische Darstellung von cos und sin

Symmetrie. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Differenzierbarkeit/Ableitungen. Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen cos und sin sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren)

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Quadratsumme. Es gilt

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

denn $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$ und $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$.

Die Zahl π und ihre Hälfte. Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt; also ist cos wegen $\cos' = -\sin$ auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass $\cos(2) < 0$ ist. Also hat cos in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist $\cos(\pi/2) = 0$. Aus der Quadratsumme und der Positivität von sin auf $[0, 2]$ folgt $\sin(\pi/2) = 1$.

Additionstheoreme. Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
\cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\
\sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \qquad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

Periodizität. Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x) \\
\sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x) \\
\cos\Bigl(x - \frac{\pi}{2}\Bigr) &= \sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Invertierbarkeit. Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

$$\begin{aligned}
\cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\
\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1]
\end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit arccos bzw. arcsin.

B
Übungsblätter

Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 1, 4. Dezember 2023

Fingerübung A (Bubble 1)**.** Berechnen Sie in der symmetrischen Gruppe S_4:

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), \quad (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

Fingerübung B (symmetrische Gruppen)**.** Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Fingerübung C (abelscher Alltag)**.** Welche „Operationen" im Alltag kommutieren miteinander? Z.B. Brille aufsetzen, Strümpfe anziehen, Schuhe anziehen, Mario-Feuerblume aktivieren, Mario-Pilz aktivieren, schlafen, in die Vorlesung gehen …

Fingerübung D (Wiederholung)**.** Welche Körper kennen Sie?

Aufgabe 1 (Inversion in Körpern; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ ist $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.
2. Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ ist $(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$.

Aufgabe 2 (Bubble 2; 4 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion: Für jede Permutation $f \in S_n$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r \in \{1, \dots, n\}$ mit $f = (x_1\ y_1) \circ (x_2\ y_2) \circ \dots \circ (x_r\ y_r)$.
Hinweis. Wenn Ihnen diese allgemeine Formulierung zu kompliziert ist, können Sie stattdessen auch zeigen, dass die Aussage für $f = (1\ 2\ \dots\ n)$ gilt.

Aufgabe 3 (Neutralität; 4 Punkte)**.** Seien $(G, \cdot_G, e_G)$ und $(H, \cdot_H, e_H)$ Gruppen und sei $f \colon G \longrightarrow H$ eine Abbildung, mit folgender Eigenschaft:

$$\forall_{g,h \in G} \quad f(g \cdot_G h) = f(g) \cdot_H f(h).$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(e_G) = e_H$ gilt.
Hinweis. Was weiß man über $f(e_G \cdot_G e_G)$?

Bonusaufgabe (6 in 5 ?! 4 Punkte)**.** Ein *Nikolauselement* in einer Gruppe $(G, \cdot, e)$ ist ein Element g mit folgender Eigenschaft:

Es ist $g^6 = e$ und für alle $k \in \{1, \dots, 5\}$ gilt $g^k \neq e$.

Der Nikolaus schwärmt davon, dass er am 6. Dezember gefeiert wird, weil folgendes gelte: Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die S_n ein Nikolauselement enthält, ist 6. Commander Blorx hält nicht viel von der Sache und behauptet, dass auch S_5 ein Nikolauselement enthält. Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Es gilt $6 = 2 \cdot 3$ und $5 = 2 + 3$.

Abgabe bis 11. Dezember 2023, 10:00, via GRIPS

Lineare Algebra I^{FIDS}: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 2, 11. Dezember 2023

Fingerübung A (UR-Koordinaten). Betrachten Sie eine der Ecken des Raumes, in dem die Übungen stattfinden, als Nullpunkt in $\mathbb{R}^3$ und die drei angrenzenden Kanten als Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^3$. Welche Koordinaten haben dann die folgenden Punkte?

Mittelpunkt Ihres Tisches, Mittelpunkt der Tafel, Haupteingang zur Mensa, Bajuwarenstr. 4.

Fingerübung B (Vektorrechnung). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $v \in V \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll?

$$\frac{1}{\lambda} \cdot v, \quad v \cdot \lambda, \quad \lambda \cdot \frac{1}{v}, \quad \lambda + v, \quad v - \lambda \cdot v, \quad \lambda^{2023} \cdot v, \quad \lambda \cdot v^{2023}.$$

Fingerübung C (linearer Alltag). Welche Alltagsgegenstände lassen sich gut in „linearer Sprache“ beschreiben? Welche nicht?

Fingerübung D (Untervektorräume?). Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}$?

$$\{0\}, \quad \{0, 2023\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \leq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 2023 \cdot x = 0\}.$$

Aufgabe 1 (Rechnen in Vektorräumen; 4 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für alle $v, w \in V$ ist $v - 2023 \cdot w = 2023 \cdot w - v$.
2. Für alle $v, w \in V$ ist $v + 2023 \cdot (-w) = (-2023) \cdot w + v$.

Aufgabe 2 (von A nach B; 4 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Menge

$$[a, b] := \big\{ t \cdot a + (1 - t) \cdot b \bigm| (t \in \mathbb{R}) \wedge (0 \leq t) \wedge (t \leq 1) \big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Skizzieren Sie die Menge $[a, b]$ für geeignete Beispiele von a und b in $\mathbb{R}^3$.
2. Ist $[a, b]$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Unterraumschnitt; 4 Punkte). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien U bzw. W Untervektorräume von V. Dann sind die beiden untenstehenden Aussagen äquivalent. Beweisen Sie eine der Implikationen!

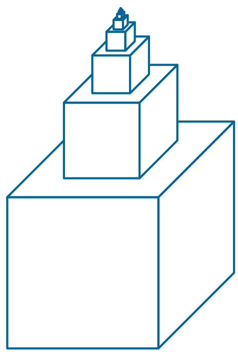
1. Es gilt $U \cap W = \{0\}$.
2. Zu jedem $v \in V$ gibt es höchstens ein Paar $(u, w) \in U \times W$ mit $v = u + w$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (OpenSCAD; 4 Punkte). OpenSCAD (https://www.openscad.org) ist Software (Open Source, GPLv2) zur Modellierung von dreidimensionalen Objekten, zum Beispiel als Vorstufe für 3D-Druck.

1. Was haben translate([x,y,z]) und scale([x,x,x]) mit der gewöhnlichen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}^3$ zu tun?

2. Wie kann man basierend auf dem Würfel cube([1,1,1]) auf einfache Weise einen Turm der folgenden Form beschreiben? Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Hinweis. https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324/src/cubetower_exercise.scad

Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 3, 18. Dezember 2023

Fingerübung A (Matrixmultiplikation). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! Gibt es $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit ...

1. $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Fingerübung B (geometrische LGS). Beschreiben Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen und skizzieren Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme in einem gemeinsamen Koordinatensystem:

1. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 + x_2 = 1$
2. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $-2 \cdot x_1 + x_2 = 2$
3. Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Fingerübung C (Matrixpotenzen). Zeigen Sie per vollständiger Induktion: Ist K ein Körper und $x \in K$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (Anzahl der Lösungen; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$, das genau zwei Lösungen besitzt.
2. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$, das genau zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 2 (das kleine Zweimalzwei; 4 Punkte).

1. Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Zeigen Sie: Dann ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$ invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Verwenden Sie den ersten Teil, um alle $x \in {\mathbb{F}_3}^2$ zu bestimmen, die das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$ erfüllen:

$$\begin{aligned} [2] \cdot x_1 + [4] \cdot x_2 &= [4] \\ [2] \cdot x_1 + [3] \cdot x_2 &= [2] \end{aligned}$$

Bitte wenden

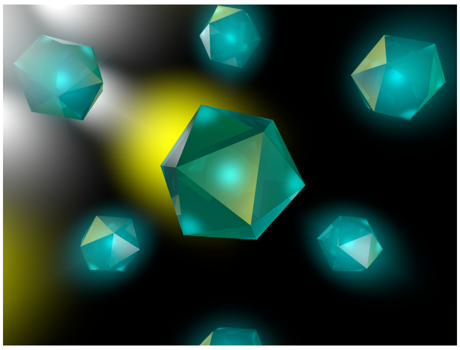
Aufgabe 3 (Rezept; 4 Punkte)**.** Commander Blorx braut seine berüchtigte Weihnachtsbrühe. Dazu verwendet er die folgenden Inhaltsstoffe:

- Kwörx: 1 Gramm Kwörx kostet 8 Gulden und duftet wie 5 Rosen.
- Slurp: 1 Gramm Slurp kostet 5 Gulden und duftet wie eine halbe Rose.
- Pfuiit: 1 Gramm Pfuiit kostet 2 Gulden und duftet wie 9 Rosen.

Das Rezept lautet: Mische so viel Kwörx, Slurp und Pfuiit, dass die entstehende Brühe 42 Gramm wiegt, 100 Gulden kostet und wie 101 Rosen duftet.

Welches lineare Gleichungssystem muss Blorx für die Zubereitung lösen? Ist dieses System homogen oder inhomogen? Beschreiben Sie das Gleichungssystem explizit und mithilfe einer Matrix!

Bonusaufgabe (Raytracing; 4 Punkte)**.** Was ist Raytracing? Wozu werden lineare Gleichungssysteme im Raytracing verwendet? Vergessen Sie nicht, Ihre Erklärungen mit geeigneten Quellen zu belegen!



Falls Sie die „Ferien“ nutzen möchten, um lineare Algebra zu üben ...

Bonusaufgabe (Gruppen; 4 Punkte)**.** Konstruieren Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit genau 42 Elementen, die *nicht* abelsch ist.
Hinweis. $42 = 7 \cdot 6$ und $\#S_3 = 6$.

Bonusaufgabe (Null; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie: Für alle $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot 0 = 0$ (wobei 0 jeweils in V liegt).
2. Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$ (wobei die linke 0 in K und die rechte 0 in V liegt).

Bonusaufgabe (Anzahl der Additionen/Multiplikationen; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$. Wieviele Additionen/Multiplikationen in K sind nötig, um $A \cdot B$ gemäß der Definition der Matrixmultiplikation zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis 8. Januar 2024, 10:00, via GRIPS
Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins Neue Jahr!

Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 4, 8. Januar 2024

Fingerübung A (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die folgenden Begriffe: Vektorraum, Untervektorraum, Matrix, Matrixmultiplikation, lineares Gleichungssystem, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme. Welche Eigenschaften kennen Sie bereits?

Fingerübung B (3D-Familie)**.** Wir betrachten die Familie $(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist diese Familie linear unabhängig?
2. Ist diese Familie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?
3. Skizzieren Sie $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$!

Fingerübung C (Elemente zählen)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Gibt es einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit genau 2023 Elementen?
2. Gibt es einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit genau 2024 Elementen?

Hinweis. Im Falle eines Falles löst eine Basis wirklich alles ...

Aufgabe 1 (eindeutige Basen; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$ besitzt genau eine Basis.
2. Der $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3$ besitzt genau eine Basis.

Aufgabe 2 (magische Quadrate; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *magisches Quadrat über K der Kantenlänge n* ist ein $n \times n$-Quadrat mit Einträgen aus K und folgender Eigenschaft: Es gibt ein $m \in K$ (die *magische Zahl*) mit:

- In jeder Zeile ist die Summe der Elemente m.
- In jeder Spalte ist die Summe der Elemente m.
- In der Haupt- bzw. Antidiagonalen ist jeweils die Summe m.

Zum Beispiel ist

2	0	2	4
4	2	0	2
0	2	4	2
2	4	2	0

ein magisches Quadrat über $\mathbb{Q}$ der Kantenlänge 4 mit magischer Zahl 8. Sei $\operatorname{MQ}_n(K)$ die Menge aller magischen Quadrate über K mit Kantenlänge n und magischer Zahl 0. Dann bildet $\operatorname{MQ}_n(K)$ einen K-Vektorraum bezüglich kästchenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{MQ}_3(\mathbb{R}) = 2$ ist, indem Sie nachweisen, dass die magischen Quadrate

1	0	-1
-2	0	2
1	0	-1

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

eine Basis von $\operatorname{MQ}_3(\mathbb{R})$ bilden.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (lineare Unabhängigkeit und Injektivität; 4 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_j)_{j \in \{1,\dots,n\}}$ eine linear unabhängige Familie in V. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung injektiv ist:

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j. \end{aligned}$$

Hinweis. Differenzen!

Bonusaufgabe (Basen zählen; 4 Punkte)**.** Bearbeiten Sie eine der beiden folgenden Aufgaben:

1. Schreiben Sie ein Programm, das die Anzahl aller Basen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums ${\mathbb{F}_2}^5$ bestimmt. Erklären Sie die Funktionsweise Ihre Programms und dokumentieren Sie Ihren Code entsprechend.

2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl aller Basen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^n$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis 15. Januar 2024, 10:00, via GRIPS

Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 5, 15. Januar 2024

Fingerübung A (Matrixmultiplikation). Sei K ein Körper und $a, b, c, d, \lambda \in K$. Berechnen Sie in $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Was passiert dabei mit den Zeilen?

Fingerübung B (Fast-Zeilenstufenform). Wir betrachten die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie Basen von $V(A_1, 0)$, $V(A_2, 0)$, $V(A_3, 0)$. Welche Dimension haben diese $\mathbb{R}$-Vektorräume?

Fingerübung C (Invertierbarkeit). Testen Sie die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (lineare Unabhängigkeit; 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Spalten der folgenden Matrix sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Die Spalten der folgenden Matrix sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis. Erst denken, dann rechnen!

Aufgabe 2 (inverse Matrix; 4 Punkte). Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und berechnen Sie zur Probe drei „zufällige“ Koeffizienten des Produkts $A \cdot A^{-1}$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Blorx-O-Color; 4 Punkte)**.** Commander Blorx sieht Farben im Blorx-O-Color-Farbmodell, das aus einer additiven Mischung der drei Grundfarben urx (u: ■), platsch (p: ■) und oink (o: ■) besteht. In RGB (Beispiel 4.3.5) lassen sich diese Farben wie folgt spezifizieren:

$$u = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.72 \\ 0.06 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.69 \\ 0.67 \end{pmatrix}, \quad o = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.80 \end{pmatrix}.$$

Genauer gesagt sieht Blorx nur Farben im RGB-Würfel, die durch positive Beiträge der Grundfarben urx, platsch und oink gemischt werden. Kann Blorx die RGB-Farbe

$$■ = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.49 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

sehen? Gehen Sie wie folgt vor:

1. Übersetzen Sie diese Frage in ein lineares Gleichungssystem.
2. Lösen Sie dieses mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

   Hinweis. Sie können ein Computeralgebrasystem verwenden; Sie müssen dann aber begründen, warum das Ergebnis korrekt ist.

Bonusaufgabe (XOR-SAT; 4 Punkte)**.** Das *exklusive Oder* $\oplus$ ist durch die folgende Wahrheitstabelle definiert (und offenbar assoziativ):

A	B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Wir betrachten das folgende Problem: Kann man die aussagenlogischen Variablen A, B, C, D so mit Wahrheitswerten belegen, dass die Formel

$$\big(A \oplus B \oplus C\big) \land \big(A \oplus (\neg B) \oplus D\big) \land \big(B \oplus (\neg C) \oplus (\neg D)\big)$$

den Wahrheitswert w liefert? Gehen Sie wie folgt vor (dies ist im allgemeinen Fall effizienter als alle Kombinationen durchzuprobieren):

1. Wenn wir w als $[0] \in \mathbb{F}_2$ und f als $[1] \in \mathbb{F}_2$ interpretieren, welche algebraische Beschreibung besitzt dann $\oplus$?
2. Übersetzen Sie die obige Formel in ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ mit vier Variablen und drei Gleichungen (so dass die Lösungen dieses Gleichungssystems genau den Belegungen entsprechen, unter denen die obige Formel den Wahrheitswert w liefert).
3. Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Was bedeutet dies für das ursprüngliche Problem?

Abgabe bis 22. Januar 2024, 10:00, via GRIPS

Lineare Algebra $\mathrm{I}^{\mathrm{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 6, 22. Januar 2024

Fingerübung A (Wiederholung). Wiederholen Sie die folgende Begriffe: Vektorraum, Linearkombination, linear (un)abhängig, Basis.

Fingerübung B (linear?). Welche der folgenden vier Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear? Zur Erinnerung: $x_1, x_2, \dots$ sind die Koordinaten von x.

$$\begin{aligned} x &\longmapsto {x_1}^2, & x &\longmapsto x_1 + 1, \\ x &\longmapsto x_1 - x_2, & x &\longmapsto 2024 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Fingerübung C (Anschauung). Visualisieren Sie die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Was sind Kern und Bild dieser Abbildung?

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (kubisch-linear? 4 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longmapsto x^3$ ist $\mathbb{Q}$-linear.
2. Die Abbildung $\mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$, $x \longmapsto x^3$ ist $\mathbb{F}_3$-linear.

   Hinweis. Kann man diese Abbildung einfacher beschreiben?!

Aufgabe 2 (Vierouette; 4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{und} \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}.$$

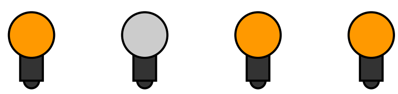
Begründen Sie Ihre Antwort und visualisieren Sie diese Abbildung!
Hinweis. Erst Geometrie, dann Algebra.

Aufgabe 3 (Blorxifikation; 4(+2) Punkte). Der *Blorxifikationsoperator* transformiert fröhlich Konfigurationen von vier Lampen gleichzeitig:

$$\begin{aligned} b\colon {\mathbb{F}_2}^4 &\longrightarrow {\mathbb{F}_2}^4 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - x_1 \\ [2023] \cdot x_1 \\ x_4 + x_2 \\ x_3 - x_2 + [2024] \cdot x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei werden die Lampenzustände durch $\mathbb{F}_2$ modelliert: „aus“ als $[0]$ und „an“ als $[1]$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Konfigurationen $x \in {\mathbb{F}_2}^4$, so dass in $b(x)$ alle Lampen „aus“ sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zum Aufwärmen: Was passiert durch Anwendung von b, wenn alle Lampen „an“ sind?
2. Zeigen Sie, dass b eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung ist, indem Sie eine Matrix B in $M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ finden, für die $b = L(B)$ ist.
3. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker b = V(B, 0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Beantworten Sie die Ursprungsfrage und begründen Sie Ihre Antwort.
5. *Bonusaufgabe.* Überprüfen Sie Ihr Ergebnis wie folgt durch *brute force*: Schreiben Sie ein Programm, das den Effekt von b auf *allen* Elementen von ${\mathbb{F}_2}^4$ berechnet und bestimmen Sie so die gesuchte Anzahl an Konfigurationen.



Bitte wenden

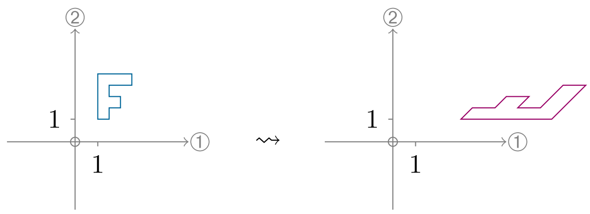
Bonusaufgabe (FerwandlunX; 4 Punkte). Schreiben (und dokumentieren!) Sie ein LaTeX-Makro \Ferwandlung mit vier Argumenten und folgender Eigenschaft: Der Aufruf

$$\text{\Ferwandlung}\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}$$

stellt den Effekt der linearen Abbildung

$$L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auf den Buchstaben „F“ graphisch dar und zeigt auch noch die entsprechende Gleichung an. Zum Beispiel liefert dann \Ferwandlung$\{1\}\{2\}\{1\}\{0\}$ so etwas wie



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \cdot x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

Welches Ergebnis liefern die folgenden Aufrufe?

- \Ferwandlung$\{0\}\{1\}\{2\}\{0\}$
- \Ferwandlung$\{1\}\{-1\}\{0\}\{1\}$
- \Ferwandlung$\{0\}\{0\}\{1\}\{1\}$
- \Ferwandlung$\{1\}\{2\}\{2\}\{1\}$

Hinweis. Bei Graphiken in LaTeX hilft z.B. das Paket tikz.

Abgabe bis 29. Januar 2024, 10:00, via GRIPS

Lineare Algebra $\mathrm{I}^{\mathsf{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold — Blatt 7, 29. Januar 2024

Fingerübung A (Wiederholung). Wiederholen Sie die folgenden Begriffe/Techniken: Basis (schon wieder!), Gaußsches Eliminationsverfahren (jetzt mit korrigierter Proposition 5.1.1) und Gauß-Rezepte, lineare Abbildung, Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen.

Fingerübung B (darstellende Matrizen). Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $M_{B,C}(f)$ für die folgenden Kombinationen von Basen. Muss man dafür wirklich „rechnen"?!

B	C
(e_1, e_2)	(e_1, e_2)
(e_1, e_2)	(e_2, e_1)
(e_1, e_2)	$(2 \cdot e_1, e_2)$

Fingerübung C (darstellende Nullmatrix?). Gibt es Basen B, C von $\mathbb{R}^2$, so dass für die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aus Fingerübung B folgendes gilt?

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (darstellende Identitätsmatrix? 4 Punkte). Wir betrachten die $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon {\mathbb{F}_2}^2 &\longrightarrow {\mathbb{F}_2}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie die Basen $B := (e_1, e_2)$ und $C := (e_1 + e_2, e_1)$ von ${\mathbb{F}_2}^2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $M_{C,C}(f) = I_2$; hierbei ist I_2 die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$.
2. Es gilt $M_{B,C}(f) = I_2$.

Aufgabe 2 (lineare Abbildungen und Basen; 4(+4) Punkte). Seien K ein Körper, seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:

1. Ist f injektiv, so ist $(f(v_i))_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie.
2. Ist f surjektiv, so ist $(f(v_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W.

Bonusaufgabe. Beweisen Sie auch die andere Aussage.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (oben und unten; 4 Punkte)**.** Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vertauscht „oben" und „unten". Sicht durch die Blorxbrille ist durch die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Wie sieht der Effekt von f aus, wenn man die Blorxbrille trägt? D.h.: Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und geben Sie die lineare Abbildung $L(M_{B,B}(f))\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ explizit an.

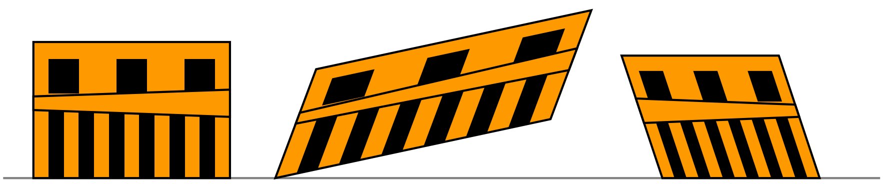
Bonusaufgabe (innen und außen; 4 Punkte)**.** Der begnadete Architekt Numerobis (bekannt aus dem historischen Dokument *Asterix und Kleopatra*) hat „gerade" sein neuestes Gebäude fertiggestellt:

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 3\cdot x + 2\cdot y - z \\ 2\cdot y + 3\cdot z \\ x + 4\cdot y - z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Aufgrund der unkonventionellen Bauweise ist es nicht immer ganz einfach, festzustellen, ob man sich innerhalb des Gebäudes befindet oder nicht ...

1. Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem löst und begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist:
   - Gegeben $x \in \mathbb{R}^3$,
   - entscheide, ob x in N liegt oder nicht.
2. Implementieren Sie den Algorithmus, wenden Sie ihn auf die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$ an und geben Sie das Ergebnis an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Abgabe bis 5. Februar 2024, 10:00, via GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt der Vorlesung *Lineare Algebra I*. Blatt 8 besteht aus Bonusaufgaben.

Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Blatt 8, 5. Februar 2024

Fingerübung A (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die Grundbegriffe der Vorlesung *Lineare Algebra I*. Was sind wichtige Sätze/Zusammenhänge? Was ist Ihr Lieblingsthema? Testen Sie Ihr Wissen an konkreten Beispielen!

Fingerübung B (Wiederholung, prähistorisch)**.** Wiederholen Sie die Grundbegriffe der Vorlesung *Grundlagen der Mathematik*. Was sind wichtige Sätze/Zusammenhänge? Was ist Ihr Lieblingsthema? Testen Sie Ihr Wissen an konkreten Beispielen!

Fingerübung C (Die Spalten …)**.** Was hat es mit **Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!** auf sich?

Fingerübung D (Üben hilft!)**.** Welche Probleme kann man mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen? Lösen Sie eine Zillion solcher Aufgaben!

Bonusaufgabe 1 (Quadratisch, praktisch, invertierbar; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede quadratische Matrix ist invertierbar.
2. Jede invertierbare Matrix ist quadratisch.

Bonusaufgabe 2 (Konjugationstrick in Gruppen; 4 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und seien $g, h \in G$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad (h^{-1} \cdot g \cdot h)^n = h^{-1} \cdot g^n \cdot h.$$

Bonusaufgabe 3 (lineare Erbschaft; 4 Punkte)**.** Geben Sie jeweils zunächst präzise Voraussetzungen und formulieren Sie eine präzise Behauptung.

1. Zeigen Sie, dass die Komposition linearer Abbildungen (mit kompatiblen Typen) linear ist.
2. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Untervektorräume (mit kompatiblen Typen) ein Untervektorraum ist.

Bonusaufgabe 4 (Basis-Umrechnung; 4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Darstellung der Vektoren

$$\begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

in ${\mathbb{F}_2}^3$ bezüglich der folgenden Basis (und begründen Sie Ihre Antwort!)

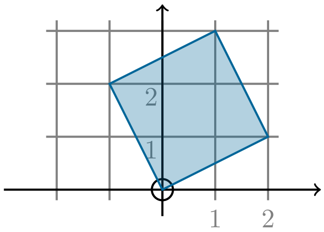
$$\left(\begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix} \right)$$

Haben Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren eingesetzt? Falls nicht: Wie hätte man es verwenden können?

Bitte wenden

Bonusaufgabe 5 (Viereck; 4 Punkte)**.** Wir betrachten die skizzierte Menge $V \subset \mathbb{R}^2$.

1. Schreiben Sie V als Menge und begründen Sie, warum Ihre Definition zur Skizze passt.
2. Skizzieren Sie für
$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
die Menge $\{A \cdot x \mid x \in V\}$ und begründen Sie, warum Ihre Skizze tatsächlich diese Menge darstellt.



Bonusaufgabe 6 (Basis-Literatur; 4 Punkte)**.** Wir betrachten den folgenden Ausschnitt aus *Essential Math for Data Science* (Hadrien Jean):

> "The *basis* is a coordinate system used to describe vector spaces (sets of vectors). It is a reference that you use to associate numbers with geometric vectors.
>
> To be considered as a basis, a set of vectors must:
>
> - Be linearly independent.
> - Span the space.
>
> Every vector in the space is a unique combination of the basis vectors. The dimension of a space is defined to be the size of a basis set. For instance, there are two basis vectors in $\mathbb{R}^2$ (corresponding to the x and y-axis in the Cartesian plane), or three in $\mathbb{R}^3$."

https://towardsdatascience.com/essential-math-for-data-science-basis-and-change-of-basis-f7af2348d463

1. Letzter Absatz, erster Satz: Geben Sie eine Begründung (oder eine Referenz aus dem Skript).
2. Letzter Absatz, zweiter Satz: Was muss bei dieser Definition berücksichtigt werden? Welchen Satz verwendet man dabei?
3. Letzter Absatz, dritter Satz: Man könnte (zu Recht) behaupten, dass es in $\mathbb{R}^2$ mehr als zwei Basisvektoren gibt; warum?
4. Im ersten Satz: Ist der bestimmte Artikel in "The *basis*" gerechtfertigt?

Freiwillige Abgabe bis 12. Februar 2024, 10:00, via GRIPS

Alle Punkte zählen als Bonuspunkte.

C

Quellcode

Die Quellen finden sich auf der Homepage zur Vorlesung:

https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324

D
Organisatorisches

Grundlagen der Mathematik$^{\text{FIDS}}$ und Lineare Algebra I$^{\text{FIDS}}$ Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F.Strunk/M. Uschold Oktober 2023

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter/Lesepläne finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324

https://elearning.uni-regensburg.de

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils montags (10:15–11:45; H 3) statt. Die erste Vorlesung ist am Montag, den 16. Oktober, um 10:15. Das Vorlesungsskript ist über die Vorlesungshomepage und GRIPS zugänglich; das Skript wird jeweils nach der Vorlesung im Verlauf des Tages aktualisiert.

- Der Kurs *Grundlagen der Mathematik (FIDS)* besteht aus sieben Vorlesungen;
- der Kurs *Lineare Algebra I (FIDS)* besteht aus acht Vorlesungen.

Ich möchte alle Teilnehmer dazu ermutigen, sich aktiv an der Vorlesung zu beteiligen und Fragen zu stellen bzw. zu beantworten. Deshalb möchte ich die Atmosphäre so locker, informell und unverbindlich wie möglich halten.

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich montags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum darauffolgenden Montag um 10:00 Uhr abzugeben (via GRIPS).

Auf jedem Übungsblatt gibt es drei reguläre Aufgaben (je 4 Punkte) und herausforderndere Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte).

Sie dürfen und sollen die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden, andernfalls werden die Punkte aberkannt. Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen zu präsentieren, andernfalls werden die Punkte aberkannt.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen als pdf-Datei ab (erzeugt von LaTeX & Co. oder Scans handschriftlicher Bearbeitungen; bitte *keine* Worddokumente, Markdown, . . .); etwaigen Quellcode bitte als Textdatei abgeben.

Die Übungsgruppen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen wird die Blatt 1 (Abgabe am 23. 10. 2023) besprochen.

Da aus organisatorischen Gründen in der ersten Vorlesungswoche noch keine Übungsgruppen stattfinden können, gibt es ein Blatt 0 mit Lösungsvorschlägen. Bitte beachten Sie dabei, dass dass es oft viele Möglichkeiten gibt, Aufgaben korrekt und vollständig zu lösen und dass dies nur eine Auswahl ist. Bei Fragen können Sie das Frageforum in GRIPS verwenden.

Zentralübung. Zusätzlich zur Vorlesung und den Übungen bietet die Zentralübung die Gelegenheit, Fragen zu stellen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und weitere Beispiele zu behandeln. Die Zentralübung findet dienstags (16:00–18:00; H 4) statt und wird von Florian Strunk bzw. Matthias Uschold geleitet. Die Zentralübung beginnt in der *zweiten* Vorlesungswoche und ist ein freiwilliges Zusatzangebot.

Fingerübungen. Zusätzlich enthalten das Skript und die Übungsblätter Fingerübungen, die elementare Techniken und Begriffe trainieren. Diese Aufgaben sollten im Idealfall so einfach sein, dass sie innerhalb weniger Minuten gelöst werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert. Die Fingerübungen auf den Übungsblättern werden ab Blatt 2 in den Übungsgruppen gemeinsam behandelt.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt in der ersten Vorlesungswoche über die Studiengangskoordination der FIDS. Bei sonstigen Fragen zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Matthias Uschold (matthias.uschold@ur.de) oder Florian Strunk (florian.strunk@ur.de).

Prüfungs-/Studienleistungen. Die Kurse *Grundlagen der Mathematik* und *Lineare Algebra I* können wie in den Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge BSc Informatik bzw. BSc Data Science eingebracht werden.

- *Studienleistung*: Erfolgreiche Teilnahme an den Übungen: In
  - *Grundlagen der Mathematik* oder
  - *Lineare Algebra I*

  mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.

  Es ist *sehr* empfehlenswert, die Studienleistung zu beiden Kursen abzulegen! Erfahrungsgemäß sind die Erfolgsaussichten in Klausuren in Mathematik sehr gering, wenn der Übungsbetrieb nicht erfolgreich absolviert wurde.
- *Prüfungsleistung*:
  - Klausur (90 Minuten) zu *Grundlagen der Mathematik* und
  - Klausur (90 Minuten) zu *Lineare Algebra I*.

Um das Modul *Mathematik I FIDS* erfolgreich zu belegen, müssen beide Klausuren bestanden sein (d.h. jeweils Note 4.0 oder besser). Die Gesamtnote des Moduls ist das arithmetische Mittel der beiden Einzelnoten.

Interessanter Twist: Wenn Sie *beide* Übungsbetriebe bestanden haben, wird bei dem Kurs, bei dem sie den Übungsbetrieb nicht als die verpflichtende Studienleistung für das Modul einbringen, die Teilnote (bei der Korrektur) wie folgt verbessert: Jeweils bei den Noten 4.0 bis 1.3 wird die Note um eine Stufe (0.3 bzw. 0.4) auf die nächstbessere Note verbessert. Insbesondere muss die Klausur dafür bestanden sein!

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig. Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Klausurtermine. Die Klausuren finden zu folgenden Terminen statt:

- *Grundlagen der Mathematik.* 04.12.2023, 16:00, H 1 (Audimax),
- *Lineare Algebra I.* 04.03.2024, 11:00, H 1 (Audimax).

Die Termine für die Wiederholungsklausuren werden rechtzeitig bekanntgegeben. Die Wiederholungsklausur für *Grundlagen der Mathematik* wird zu einem ähnlichen Termin wie die Klausur zur *Linearen Algebra I* stattfinden (nämlich am 04.03.2024, 13:15, H 1). Die Wiederholungsklausur zur *Linearen Algebra I* wird gegen Ende der Semesterferien stattfinden (voraussichtlich am 08.04.2024).

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

https://www.uni-regensburg.de/studium/startseite/verhalten-krankheitsfall/index.html

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an die Studiengangskoordination der FIDS bzw. an Matthias Uschold oder Florian Strunk:

  matthias.uschold@ur.de, florian.strunk@ur.de

- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder fragen Sie in der Zentralübung.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Matthias Uschold, Florian Strunk oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung oder das zuständige Prüfungsamt.

Lineare Algebra $\mathsf{I}^{\mathsf{FIDS}}$
Hinweise zu den Übungsaufgaben

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Oktober 2023

Ziel der Übungsaufgaben. Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen. Insbesondere ist der Weg das Ziel: Es ist wertvoller, eigenständig eine Aufgabe suboptimal zu bearbeiten als eine korrektere Lösung von anderen zu übernehmen. Nutzen Sie den Luxus, dass Sie für Ihre Abgaben *individuelle* Rückmeldung erhalten!

Das Punkteminimum für die Studienleistung ist das *Minimum*. Sie sollten versuchen, möglichst viele Punkte zu erreichen und nicht nach Erreichen dieser Minimalzahl die Übungen schleifen lassen!

Wie bearbeitet man eine Übungsaufgabe?

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch. Kennen Sie alle auftretenden Begriffe? Verstehen Sie, was in den Aufgaben verlangt wird?
- Was sind die Voraussetzungen? Was ist zu zeigen? Wie könnten diese Dinge zusammenhängen? Gibt es Sätze aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie die behaupteten Aussagen, an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?
- Versuchen Sie, das Problem in kleinere Teilprobleme aufzuteilen. Können Sie diese Teilprobleme lösen?
- Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit den Begriffen und Sätzen auseinandersetzen.
- Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

Wie schreibt man eine Lösung auf?

- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis.
- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf.
- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!
- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten.
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken.
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.

Bewertungskriterien. Bei der Bewertung der abgegebenen Lösungen wird auf folgendes geachtet:

- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?

Viel Erfolg und viel Spass bei den Übungen!

Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$
Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Oktober 2023

Ziel der Prüfungsvorbereitung. Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung.

Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

Erreichen dieses Ziels. Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek und Computer-Werkzeuge)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Kurz vor der Prüfung:

- Kann ich mein Wissen präzise und verständlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren ...)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen?
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?

Bewertungskriterien. In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, ...)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen
- Es werden keine Programmieraufgaben gestellt.

Viel Erfolg bei der Prüfung!

Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] B.L. Davis, D. MacLagan. The card game SET, *The Mathematical Intelligencer*, 25(3), 33–40, Juni 2003. Cited on page: 24

[2] Epic Games. *Unreal Engine Documentation*, https://docs.unrealengine.com/ Cited on page: 86

[3] C. Godsil, G. Royle. *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 207, Springer, 2001. Cited on page: 112

[4] A.N. Langville, C.D. Meyer. *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*, Princeton University Press, 2006. Cited on page: 112

[5] C. Löh. *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript, WS 2016/17, Universität Regensburg, 2017.
https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws1617/lecture_notes.pdf Cited on page: 44, 53

[6] C. Löh. *Algebra*, Vorlesungsskript, WS 17/18, Universität Regensburg, 2018.
https://loeh.app.ur.de/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf
Cited on page: 13, 14

[7] C. Löh. *Geometrie (Lehramt Gymnasium)*, Vorlesungsskript, SS 23, Universität Regensburg, 2023. Cited on page: 24

[8] C. Löh. *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript, WS 23/24, Universität Regensburg, 2023.
https://loeh.app.ur.de/teaching/fids_ws2324/lecture_notes.pdf
Cited on page: ix, 3, 8, 13, 57, 74, 84, 102, 103, 107

[9] J. Matoušek. *Thirty-tree Miniatures. Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, *Student Mathematical Library*, 53, American Mathematical Society, 2010. Cited on page: 40, 41

[10] *OpenGL Wiki*,
https://www.khronos.org/opengl/wiki/ Cited on page: 86, 99

[11] B.C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991. Cited on page: 74

[12] V. Strassen. *Gaussian elimination is not optimal*, *Numer. Math.*, 13, 354–356, 1969. Cited on page: 109

[13] Unity Technologies. *Unity Scripting API Documentation*,
https://docs.unity3d.com/ScriptReference/ Cited on page: 86

Deutsch → English

Familie	family	44
Fibonacci-Zahl	Fibonacci number	107
Fourieranalyse	Fourier analysis	58
Funktionenraum	function space	21

G

Gaußsches Eliminationsverfahren	Gauss elimination	59
Gerade	line	23
goldener Schnitt	golden ratio	107
Graph	graph	102
Gruppe	group	7

I

Invarianz der Dimension	invariance of dimension	89
invertierbare Matrix	invertible matrix	36

K

Kante	edge	102
Kern	kernel	82
Knoten	vertex	102
kommutatives Diagramm	commutative diagram	89
Koordinate	coordinate	16
Körper	field	6, 12
Körpererweiterung	field extension	20
Kosinus	cosine	A.5
Kreis	cycle	102

L

linear abhängig	linearly dependent	46
linear unabhängig	linearly independent	46
lineare Abbildung	linear map	73, 74
lineare Gleichung	linear equation	29
linearer Code	linear code	40
lineares Gleichungssystem	system of linear equations	29
Linearkombination	linear combination	44

M

Matrix (Pl. Matrizen)	matrix (pl. matrices)	30

N

nicht-lineare Abbildung	non-linear map	75

P

Pivot	pivot	60
Potenz	power	101

Q

English → Deutsch

A

adjacency matrix	Adjazenzmatrix	103
affine line	affine Gerade	24
affine subspace	affiner Unterraum	24
alphabet	Alphabet	40

B

base change	Basiswechsel	92
basis	Basis	43, 51
bit vector	Bitvektor	20

C

code	Code	40
column	Spalte	31
commutative diagram	kommutatives Diagramm	89
connected	zusammenhängend	102
coordinate	Koordinate	16
cosine	Kosinus	A.5
cycle	Kreis	102

D

dimension	Dimension	43
direct product	direktes Produkt	27
direct sum	direkte Summe	26

E

edge	Kante	102

F

family	Familie	44
Fibonacci number	Fibonacci-Zahl	107
finitely generated	endlich erzeugt	46
Fourier analysis	Fourieranalyse	58
function space	Funktionenraum	21

G

Gauss elimination	Gaußsches Eliminationsverfahren	59
generated subspace	erzeugter Untervektorraum	45
generating set	Erzeugendensystem	45
golden ratio	goldener Schnitt	107
graph	Graph	102
group	Gruppe	7

I

identity matrix	Einheitsmatrix	31
image	Bild	82
inner product	Skalarprodukt	19
invariance of dimension	Invarianz der Dimension	89
invertible matrix	invertierbare Matrix	36

K

kernel	Kern	82

L

line	Gerade	23
linear code	linearer Code	40
linear combination	Linearkombination	44
linear equation	lineare Gleichung	29
linear map	lineare Abbildung	73, 74
linearly dependent	linear abhängig	46
linearly independent	linear unabhängig	46

M

matrix (pl. matrices)	Matrix (Pl. Matrizen)	30

N

non-linear map	nicht-lineare Abbildung	75

P

path	Weg	102
pivot	Pivot	60
power	Potenz	101

Q

Index

Finger weg! Gaaaaa! . . . Das war der lila Knopf. Jetzt kann alles mögliche passieren! Aber fürs Drucken kann das durchaus nützlich sein . . .