Wiederholungsklausur Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold 8. April 2024

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 10:00. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:30 Uhr oder vor 11:10 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

☐ Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Grundlagen der Mathematik nicht bestanden habe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich für eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	15	5	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Zeigen Sie: In der symmetrischen Gruppe S_3 ist $(1\ 3) \circ (2\ 3) \neq (1\ 2\ 3)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Gibt es in jedem Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Element $x \in K$ mit $x \cdot x = -1$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Ist die folgende Menge ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Wir zeigen, dass die beiden Permutationen angewendet auf 1 verschiedene Werte annehmen: Es gilt
$$\big((1\ 3) \circ (2\ 3)\big)(1) = (1\ 3)\big((2\ 3)(1)\big) = (1\ 3)(1) = 3$$
und
$$(1\ 2\ 3)(1) = 2.$$
Insbesondere ist $(1\ 3) \circ (2\ 3) \neq (1\ 2\ 3)$.
2. Nein, denn: Zum Beispiel gibt es im Körper der reellen Zahlen kein solches Element (alle Quadrate sind nicht-negativ und -1 ist negativ).

   [Analog kann man auch im Körper der rationalen Zahlen argumentieren. Auch in $\mathbb{F}_3$ gibt es kein solches Element (man kann alle Elemente durchprobieren).]
3. Nein, denn: Die angegebene Menge U enthält nicht den Nullvektor: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$
insbesondere ist die zweite Koordinate nie gleich 0.

Aufgabe 2 (6 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die inverse Matrix von
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$
Geben Sie alle Zwischenschritte an.

2. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gibt, die die Gleichung
$$(X + I_3) \cdot A = I_3$$
erfüllt.

Lösung:

1. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (angewendet auf die erweiterte Matrix $(A \mid I_3)$) erhalten wir:

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) - (1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\quad]{\substack{(1)-2\cdot(2)\\(3)+2\cdot(2)}} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\quad]{(-1)\cdot(3)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\quad]{\substack{(1)-2\cdot(3)\\(2)+(3)}} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Da es sich bei der linken Seite um I_3 handelt, folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $X := A^{-1} - I_3$. Dann ist $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und es gilt

$$(X + I_3) \cdot A = (A^{-1} - I_3 + I_3) \cdot A = A^{-1} \cdot A = I_3.$$

[Wie findet man diese Lösung? Z.B., indem man die gewünschte Gleichung von rechts mit A^{-2} multipliziert.]

Aufgabe 3 (2 + 8 + 5 = 15 Punkte). Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

Gesucht: alle $x \in \mathbb{F}_2{}^3$ mit

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 &= [0] \\ x_1 - x_2 \quad\quad &= [1] \\ x_2 - x_3 &= [0] \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ und einen Vektor $b \in \mathbb{F}_2{}^3$ an, so dass das obige lineare Gleichungssystem die folgende Form besitzt:

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{F}_2{}^3$ mit $A \cdot x = b$

2. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis von $V(A, 0)$.

3. Besitzt das obige inhomogene lineare Gleichungssystem eine Lösung?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Die gewünschte Eigenschaft haben:

$$A := \begin{pmatrix} [1] & [0] & [1] \\ [1] & [-1] & [0] \\ [0] & [1] & [-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \\ [0] & [1] & [1] \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} [0] \\ [1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

2. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren können wir A wie folgt in Zeilenstufenform überführen:

$$\text{Pivot?} \quad \begin{matrix} \boxed{[1]} & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \\ [0] & [1] & [1] \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} \quad \begin{matrix} \boxed{[1]} & [0] & [1] \\ [0] & [1] & [1] \\ [0] & [1] & [1] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Pivot?} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \boxed{[1]} & [0] & [1] \\ [0] & \boxed{[1]} & [1] \\ [0] & [1] & [1] \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \quad \begin{array}{ccc} \boxed{[1]} & [0] & [1] \\ [0] & \boxed{[1]} & [1] \\ [0] & [0] & [0] \end{array}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform.

Somit erhalten wir („Rückwärtsauflösen“), dass

$$\left(\begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $V(A, 0)$ ist.

3. Nein, denn: *Angenommen*, $x \in \mathbb{F}_2{}^3$ wäre eine Lösung. Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = x_2$. Aus der ersten Gleichung folgt $x_1 = -x_3$. Also liefert die zweite Gleichung, dass

$$[1] = x_1 - x_2 = -x_3 - x_3.$$

Wegen $x_3 \in \mathbb{F}_2$ ist $-x_3 - x_3 = [0]$. Also erhalten wir $[1] = [0]$, was nicht sein kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine solche Lösung gibt.

[Alternativ könnte man natürlich auch das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das inhomogene System anwenden.]

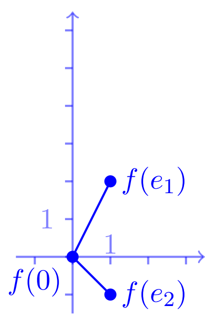
Aufgabe 4 (1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 15 Punkte). Wir betrachten die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Matrix $M(f)$.
2. Skizzieren Sie die Menge $f\big(\{t \cdot e_1 \mid t \in [0,1]\}\big) \cup f\big(\{t \cdot e_2 \mid t \in [0,1]\}\big)$ in $\mathbb{R}^2$.
3. Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
4. Ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Bestimmen Sie für die Standardbasis E_2 von $\mathbb{R}^2$ und die Basis
$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$
von $\mathbb{R}^2$ die Matrix $M_{B,E_2}(f)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

Lösung:

1. Es ist (die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!)
$$M(f) = \big(f(e_1) \mid f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$
2. Die gesuchte Menge ist die Vereinigung der Strecken mit den Endpunkten $f(0)$ und $f(e_1)$ bzw. $f(0)$ und $f(e_2)$:



3. Nach Definition ist
$$\ker f = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x) = 0\right\} = V\big(M(f), 0\big).$$
Wir bestimmen $V(M(f), 0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:
$$\text{Pivot?} \quad \begin{matrix} \boxed{1} & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$
$$\xrightarrow{(2) - 2\cdot(1)} \quad \begin{matrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & -3 \end{matrix}$$
$$\text{Pivot?} \quad \begin{matrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-3} \end{matrix}$$
$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3})\cdot(2)} \quad \begin{matrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{matrix}$$
$$\xrightarrow{(1) - (2)} \quad \begin{matrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{matrix}$$
Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Wir erhalten somit („Rückwärtsauflösen“), dass $V(M(f), 0) = \{0\}$ ist. Also ist die leere Familie eine Basis von $\ker f = V(M(f), 0)$.

[Alternativ könnte man das entsprechende lineare Gleichungssystem auch „von Hand“ lösen.]

4. Ja, denn: Nach dem vorigen Aufgabenteil enthält $\ker f$ nur den Nullvektor. Damit ist die lineare Abbildung f injektiv.

5. Nach Definition ist
$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2\cdot 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2\cdot 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Somit ist (die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!)
$$M_{B,E_2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
[Alternativ kann man auch verwenden, dass
$$M_{B,E_2}(f) = M_{E_2,E_2} \cdot M(f) \cdot M_{E_2,B} = I_2 \cdot M(f) \cdot M_B = M(f) \cdot M_B$$
ist, und so die gesuchte Matrix berechnen.]

Aufgabe 5 (1 + 4 = 5 Punkte)**.**

1. Wann heißt eine endliche Familie von Vektoren in einem Vektorraum *linear unabhängig*?
2. Ist die folgende Familie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V heißt *linear unabhängig*, wenn folgendes gilt: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt bereits

$$\forall_{i\in I} \quad \lambda_i = 0.$$

2. Nein, denn: Wir bezeichnen diese drei Vektoren mit v_1, v_2, v_3. Sei $\lambda_1 := -2$, $\lambda_2 := 1$, $\lambda_3 := -1$. Dann ist

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aber $\lambda_1 \neq 0$. Also ist die Familie (v_1, v_2, v_3) nicht linear unabhängig.

[Falls man die Lösung nicht sofort sieht, kann man natürlich z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren verwenden.]

Aufgabe 6 ($1 + 4 = 5$ Punkte)**.**

1. Wie kann man die Zeilenoperation „Addition der dritten Zeile zur ersten Zeile“ einer 3×3-Matrix durch Multiplikation einer Matrix von links beschreiben?

2. Gibt es eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{2024} \longrightarrow \mathbb{R}^{2023}$?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Die Zeilenoperation „Addition der dritten Zeile zur ersten Zeile“ einer 3×3-Matrix wird durch Multiplikation (von links) mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   beschrieben.

2. Nein, denn:

   Angenommen, es gäbe eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^{2024} \longrightarrow \mathbb{R}^{2023}$; insbesondere ist $\ker f = \{0\}$ und $\operatorname{im} f$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2023}$. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt dann

$$\begin{aligned} 2024 &= \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f + \dim_{\mathbb{R}} \ker f \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f + 0 \\ &\leq 2023 + 0 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

   bzw. $2024 \leq 2023$, was nicht sein kann. Also gibt es keine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{2024} \longrightarrow \mathbb{R}^{2023}$.

   [Man kann z.B. auch mit dem Bild einer Basis von $\mathbb{R}^{2024}$ unter f und den Basissätzen argumentieren.

   Die Mengen $\mathbb{R}^{2023}$ und $\mathbb{R}^{2024}$ sind erstaunlicherweise gleichmächtig; man kann also nicht einfach über die Mächtigkeit argumentieren, sondern muss die Linearität nutzen.

   Außerdem: $\mathbb{R}^{2023}$ enthält unendlich viele Elemente und nicht genau 2023.]