Probeklausur Lineare Algebra I$^{\mathsf{FIDS}}$

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold Februar 2024

Name:	Vorname:
Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐	Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 11:00. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 12:30 Uhr oder vor 12:10 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

☐ Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Grundlagen der Mathematik nicht bestanden habe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich fr eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	15	5	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($2+4+4=10$ Punkte)**.**

1. Berechnen Sie $(1\ 3) \circ (3\ 2)$ in der symmetrischen Gruppe S_3.
   Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Gibt es in jedem Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Element $x \in K$ mit $x+x = 1$?
   Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Ist die folgende Menge ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (6 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die inverse Matrix von
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$
Geben Sie alle Zwischenschritte an.

2. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gibt, die die Gleichung
$$X \cdot A = A + I_3$$
erfüllt.

Aufgabe 3 (2 + 8 + 5 = 15 Punkte). Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

Gesucht: alle $x \in \mathbb{F}_2{}^3$ mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= [0] \\ x_1 \qquad\qquad &= [1] \\ x_2 + x_3 &= [0] \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ und einen Vektor $b \in \mathbb{F}_2{}^3$ an, so dass das obige lineare Gleichungssystem die folgende Form besitzt:

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{F}_2{}^3$ mit $A \cdot x = b$

2. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis von $V(A, 0)$.

3. Besitzt das obige inhomogene lineare Gleichungssystem eine Lösung?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 15 Punkte). Wir betrachten die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Matrix $M(f)$.
2. Skizzieren Sie die Menge $f\big(\{s \cdot e_1 + t \cdot e_2 \mid s, t \in [0,1]\}\big)$ in $\mathbb{R}^2$.
3. Bestimmen Sie den Kern von f. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
4. Ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Bestimmen Sie für die Standardbasis E_2 von $\mathbb{R}^2$ und die Basis

   $$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   von $\mathbb{R}^2$ die Matrix $M_{B,E_2}(f)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

Aufgabe 5 ($1 + 4 = 5$ Punkte).

1. Wann heißt eine endliche Familie von Vektoren in einem Vektorraum *linear unabhängig*?

2. Ist die folgende Familie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 ($1 + 4 = 5$ Punkte)**.**

1. Wie kann man die Zeilenoperation „Vertauschen der ersten und der zweiten Zeile" einer 3×3-Matrix durch Multiplikation einer Matrix von links beschreiben?

2. Gibt es eine linear unabhängige Familie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2024}$, die aus genau 2025 Elementen besteht?

   Begründen Sie Ihre Antwort.