

# Probeklausur Lineare Algebra I<sup>FIDS</sup>

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold

Februar 2024

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 11:00. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 12:30 Uhr oder vor 12:10 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Grundlagen der Mathematik nicht bestanden habe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich für eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

**Viel Erfolg!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	15	5	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note:

Unterschrift:

**Aufgabe 1** (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Berechnen Sie  $(1\ 3) \circ (3\ 2)$  in der symmetrischen Gruppe  $S_3$ .  
Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Gibt es in jedem Körper  $(K, +, \cdot, 0, 1)$  ein Element  $x \in K$  mit  $x+x = 1$ ?  
Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Ist die folgende Menge ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

*Lösung:*

1. Es gilt

$$\begin{aligned} ((1\ 3) \circ (3\ 2))(1) &= (1\ 3)((3\ 2)(1)) = (1\ 3)(1) = 3 \\ ((1\ 3) \circ (3\ 2))(2) &= (1\ 3)((3\ 2)(2)) = (1\ 3)(3) = 1 \\ ((1\ 3) \circ (3\ 2))(3) &= (1\ 3)((3\ 2)(3)) = (1\ 3)(2) = 2. \end{aligned}$$

Also ist  $(1\ 3) \circ (3\ 2) = (1\ 3\ 2)$ .

2. Nein, denn: Der Körper  $\mathbb{F}_2$  enthält nur genau zwei Elemente (nämlich 0 und 1; auch notiert als Restklassen  $[0]$  bzw.  $[1]$ ). In  $\mathbb{F}_2$  gilt aber

$$0 + 0 = 0 \neq 1 \quad \text{und} \quad 1 + 1 = [1 + 1] = [0] = 0 \neq 1.$$

3. Nein, denn: Die angegebene Menge  $U$  ist zum Beispiel nicht unter Addition abgeschlossen: Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U,$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U.$$

[Analog kann man auch bzgl. Skalarmultiplikation argumentieren.]

**Aufgabe 2** (6 + 4 = 10 Punkte).

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Geben Sie alle Zwischenschritte an.

2. Zeigen Sie, dass es eine Matrix  $X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  gibt, die die Gleichung

$$X \cdot A = A + I_3$$

erfüllt.

*Lösung:*

1. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (angewendet auf die erweiterte Matrix  $(A \mid I_3)$ ) erhalten wir:

$$\begin{array}{l} \text{Pivot?} \\ \phantom{\text{Pivot?}} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\text{Pivot?}} \\ \phantom{\text{Pivot?}} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (1) \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\text{Pivot?}} \\ \phantom{\text{Pivot?}} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ (3) - (1) \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Pivot?} \\ \phantom{\text{Pivot?}} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (3) + (2) \\
 (1) - (2) \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc|ccc}
 \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Pivot?} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 1 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (2) - (3) \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc|ccc}
 \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\
 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 1 & 1
 \end{array}$$

Da es sich bei der linken Seite um  $I_3$  handelt, folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei  $X := I_3 + A^{-1}$ . Dann ist  $X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  und es gilt

$$X \cdot A = (I_3 + A^{-1}) \cdot A = I_3 \cdot A + A^{-1} \cdot A = A + I_3.$$

[Wie findet man diese Lösung? Z.B., indem man die gewünschte Gleichung von rechts mit  $A^{-1}$  multipliziert.]

**Aufgabe 3** ( $2 + 8 + 5 = 15$  Punkte). Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

Gesucht: alle  $x \in \mathbb{F}_2^3$  mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= [0] \\ x_1 &= [1] \\ x_2 + x_3 &= [0] \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Matrix  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{F}_2)$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{F}_2^3$  an, so dass das obige lineare Gleichungssystem die folgende Form besitzt:

Gesucht: alle  $x \in \mathbb{F}_2^3$  mit  $A \cdot x = b$

2. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis von  $V(A, 0)$ .
3. Besitzt das obige inhomogene lineare Gleichungssystem eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Lösung:*

1. Die gewünschte Eigenschaft haben:

$$A := \begin{pmatrix} [1] & [1] & [-1] \\ [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] \\ [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [1] \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} [0] \\ [1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

2. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren können wir  $A$  wie folgt in Zeilenstufenform überführen:

$$\begin{array}{l} \text{Pivot?} \\ \begin{array}{ccc} [1] & [1] & [1] \\ [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [1] \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(2) - (1)} \\ \text{-----} \rightarrow \\ \begin{array}{ccc} [1] & [1] & [1] \\ [0] & +[1] & +[1] \\ [0] & [1] & [1] \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Pivot?} \\ \text{Pivot?} \\ \text{Pivot?} \end{array} \begin{array}{ccc} \boxed{[1]} & [1] & [1] \\ [0] & \boxed{[1]} & [1] \\ [0] & [1] & [1] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) - (2) \\ (1) - (2) \\ \text{-----} \rightarrow \end{array} \begin{array}{ccc} \boxed{[1]} & [0] & [0] \\ [0] & \boxed{[1]} & [1] \\ [0] & [0] & [0] \end{array}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform.

Somit erhalten wir („Rückwärtsauflösen“), dass

$$\left( \begin{array}{c} [0] \\ +[1] \\ [1] \end{array} \right)$$

eine  $\mathbb{F}_2$ -Basis von  $V(A, 0)$  ist.

3. Nein, denn: *Angenommen*,  $x \in \mathbb{F}_2^3$  wäre eine Lösung. Aus der zweiten Gleichung folgt  $x_1 = [1]$ . Aus der dritten Gleichung folgt  $x_3 = -x_2$ ; in  $\mathbb{F}_2$  bedeutet dies aber  $x_3 = x_2$ . Einsetzen in die erste Gleichung liefert somit

$$[0] = x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + x_2 - x_2 = x_1 = [1],$$

was nicht sein kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine solche Lösung gibt.

[Alternativ könnte man natürlich auch das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das inhomogene System anwenden.]

**Aufgabe 4** ( $1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 15$  Punkte). Wir betrachten die folgende  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Matrix  $M(f)$ .
2. Skizzieren Sie die Menge  $f(\{s \cdot e_1 + t \cdot e_2 \mid s, t \in [0, 1]\})$  in  $\mathbb{R}^2$ .
3. Bestimmen Sie den Kern von  $f$ . Geben Sie alle Zwischenschritte an.
4. Ist die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Bestimmen Sie für die Standardbasis  $E_2$  von  $\mathbb{R}^2$  und die Basis

$$B := \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

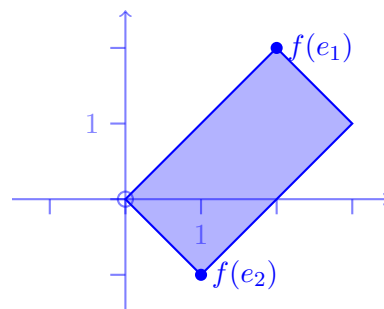
von  $\mathbb{R}^2$  die Matrix  $M_{B,E_2}(f)$ . Geben Sie alle Zwischenschritte an.

*Lösung:*

1. Es ist (die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!)

$$M(f) = (f(e_1) \mid f(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

2. Die gesuchte Menge ist das folgende Viereck (mit den Ecken  $0$ ,  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_1 + e_2)$ ):



3. Nach Definition ist

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\} = V(M(f), 0).$$

Wir bestimmen  $V(M(f), 0)$  mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{cc} \boxed{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \cdot (1) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (2) - 2 \cdot (1) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{array}$$

$$\text{Pivot?} \quad \begin{array}{cc} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \cdot (2) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (1) - \frac{1}{2} \cdot (2) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Wir erhalten somit („Rückwärtsauflösen“):

$$\ker f = V(M(f), 0) = \{0\}.$$

[Alternativ könnte man das entsprechende lineare Gleichungssystem auch „von Hand“ lösen.]

4. Ja, denn: Nach dem vorigen Aufgabenteil enthält  $\ker f$  nur den Nullvektor. Damit ist die lineare Abbildung  $f$  injektiv.

5. Nach Definition ist

$$f \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = M(f) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Name:

Matrikelnr.:

Seite 5/7

---

Somit ist (die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!)

$$M_{B,E_2}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Alternativ kann man auch verwenden, dass

$$M_{B,E_2}(f) = M_{E_2,E_2} \cdot M(f) \cdot M_{E_2,B} = I_2 \cdot M(f) \cdot M_B = M(f) \cdot M_B$$

ist, und so die gesuchte Matrix berechnen. ]

**Aufgabe 5** (1 + 4 = 5 Punkte).

1. Wann heißt eine endliche Familie von Vektoren in einem Vektorraum *linear unabhängig*?
2. Ist die folgende Familie im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig?

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

*Lösung:*

1. Sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine endliche Familie  $(v_i)_{i \in I}$  in  $V$  heißt *linear unabhängig*, wenn folgendes gilt: Für jede Familie  $(\lambda_i)_{i \in I}$  in  $K$  mit  $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$  folgt bereits

$$\forall_{i \in I} \lambda_i = 0.$$

2. Nein, denn: Wir bezeichnen diese drei Vektoren mit  $v_1, v_2, v_3$ . Sei  $\lambda_1 := 1$ ,  $\lambda_2 := -1$ ,  $\lambda_3 := -1$ . Dann ist

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aber  $\lambda_1 \neq 0$ . Also ist die Familie  $(v_1, v_2, v_3)$  nicht linear unabhängig.

[Falls man die Lösung nicht sofort sieht, kann man natürlich z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren verwenden.]

**Aufgabe 6** (1 + 4 = 5 Punkte).

1. Wie kann man die Zeilenoperation „Vertauschen der ersten und der zweiten Zeile“ einer  $3 \times 3$ -Matrix durch Multiplikation einer Matrix von links beschreiben?
2. Gibt es eine linear unabhängige Familie im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{2024}$ , die aus genau 2025 Elementen besteht?  
Begründen Sie Ihre Antwort.

*Lösung:*

1. Die Zeilenoperation „Vertauschen der ersten und der zweiten Zeile“ einer  $3 \times 3$ -Matrix wird durch Multiplikation (von links) mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

2. Nein, denn: Nach dem Ergänzungssatz kann jede linear unabhängige Familie in  $\mathbb{R}^{2024}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^{2024}$  ergänzt werden. Da jede Basis von  $\mathbb{R}^{2024}$  genau 2024 Elemente enthält (auch eine Konsequenz aus dem Ergänzungs- oder dem Austauschatz), besitzt somit jede linear unabhängige Familie in  $\mathbb{R}^{2024}$  höchstens 2024 Elemente.