Wiederholungsklausur zu Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold 4. März 2024

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 13:15. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 15:45 Uhr oder vor 15:25 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

☐ Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Lineare Algebra I nicht bestehe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich für eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	10	10	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note: Unterschrift:

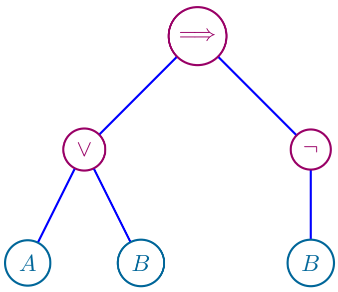
Aufgabe 1 (3+2+5 = 10 Punkte). Seien A und B aussagenlogische Variablen.

1. Welchen Wert erhält $(A \vee B) \Longrightarrow (\neg B)$, wenn wir A mit f und B mit f belegen? Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Zeichnen Sie den Syntaxbaum für $(A \vee B) \Longrightarrow (\neg B)$.
3. Ist $(A \Longrightarrow B) \vee (A \wedge B)$ eine aussagenlogische Tautologie?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Wir erhalten Schritt für Schritt:
   - $A \vee B$ erhält den Wert f
   - $\neg B$ erhält den Wert w
   - $(A \vee B) \Longrightarrow (\neg B)$ erhält den Wert w.

   [Den zweiten Schritt braucht man nicht unbedingt.]
2. 

3. *Nein*, denn: Es gibt eine Belegung für A bzw. B, die *nicht* den Wert w liefert:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \wedge B$	$(A \Longrightarrow B) \vee (A \wedge B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

[Es genügt natürlich, eine solche Belegung anzugeben.]

Aufgabe 2 (2 + 3 + 5 = 10 Punkte).

1. Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} \cup \{4, 42, 2024\}$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $f \colon \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ mit folgender Eigenschaft:
$$\forall_{y \in \{0,1,2\}} \quad \exists_{x \in \{0,1,2\}} \quad \big((x \neq y) \wedge (f(x) = y)\big)$$
Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Sei $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung und sei $f \circ f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv. Ist dann auch $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Es ist $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Also ist
$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} \cup \{4, 42, 2024\} &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 42, 2024\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, 42, 2024\}.\end{aligned}$$
Somit enthält $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} \cup \{4, 42, 2024\}$ genau die Elemente
$$0, 1, 2, 3, 4, 42, 2024.$$
2. Sei $f \colon \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ gegeben durch $0 \longmapsto 1$, $1 \longmapsto 2$, $2 \longmapsto 0$. Dann gilt
$$\begin{aligned} 2 &\neq 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 0 \\ 0 &\neq 1 \quad \text{und} \quad f(0) = 1 \\ 1 &\neq 2 \quad \text{und} \quad f(1) = 2. \end{aligned}$$
Somit gilt
$$\forall_{y \in \{0,1,2\}} \quad \exists_{x \in \{0,1,2\}} \quad \big((x \neq y) \wedge (f(x) = y)\big).$$
3. *Ja*, denn: Sei $y \in \mathbb{N}$. Da $f \circ f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $(f \circ f)(x) = y$. Damit folgt $f(x) \in \mathbb{N}$ und
$$f\big(f(x)\big) = (f \circ f)(x) = y.$$
Also ist $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv.

Aufgabe 3 ($1 + 5 + 4 + 5 = 15$ **Punkte**). Wir betrachten die rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

definierte Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie $f(2)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Beweisen Sie per Induktion, dass $f(n) = 5 \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
3. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2024$? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Faultier Flash sprintet am nullten Tag 2024 cm weit. Am n-ten Tag sprintet Flash n cm weniger weit als am Tag zuvor. Wieviele cm weit sprintet Flash am 42. Tag?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Mit der Rekursion erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) = (1+1) \cdot f(1) \\ &= 2 \cdot f(0+1) = 2 \cdot \big((0+1) \cdot f(0)\big) \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 5) \\ &= 10. \end{aligned}$$

2. Induktionsanfang: Es gilt $f(0) = 5 = 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0!$, wie behauptet.

   Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei bereits gezeigt, dass $f(n) = 5 \cdot n!$ gilt.

   Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch $f(n+1) = 5 \cdot (n+1)!$ gilt: Es gilt

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) && \text{(Rekursionsgleichung)} \\ &= (n+1) \cdot (5 \cdot n!) && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 5 \cdot \big((n+1) \cdot n!\big) && \text{(grundlegende Arithmetik in } \mathbb{N}\text{)} \\ &= 5 \cdot (n+1)! && \text{(rekursive Definition der Fakultätsfunktion)} \end{aligned}$$

   [Alternativ kann man zeigen, dass $n \longmapsto 5 \cdot n!$ dieselbe Rekursion erfüllt wie f und den Rekursionssatz anwenden.]

3. *Nein*, denn: Nach dem zweiten Teil ist $f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar. Aber 2024 ist *nicht* durch 5 teilbar.

4. Die Entfernung $f(n)$ (gemessen in cm), die Flash am Tag n sprintet, genügt der folgenden Rekursion:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2024 \\ f(n+1) &= f(n) - (n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

   [Genauer gesagt: $f(n+1) = \max\big(0, f(n) - (n+1)\big)$. Dieses Detail musste aber nicht unbedingt berücksichtigt werden.]

   Also gilt

$$f(n) = f(0) - \sum_{j=0}^{n} j = 2024 - \sum_{j=0}^{n} j$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

   ist. Somit folgt

$$f(42) = 2024 - \frac{42 \cdot 43}{2} = 2024 - 21 \cdot 43 = 2024 - 903 = 1121.$$

   Also sprintet Flash am 42. Tag genau 1121 cm weit.

   [Alternativ kann man die geschlossene Form auch wie in der Vorlesung per Induktion/Rekursion beweisen. Als Ergebnis wäre hier auch $2024 - 21 \cdot 32$ ausreichend gewesen.]

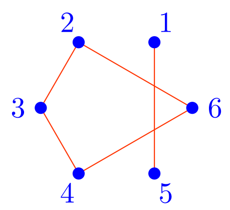
Aufgabe 4 (1+4+5 = 10 Punkte). Wir betrachten den ungerichteten Graphen

$$X := \big(\{1,\dots,6\}, \{\{1,5\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{4,6\}\}\big).$$

1. Skizzieren Sie X.
2. Ist der Graph X zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Kann man zu X eine Kante (aber keine Knoten!) hinzufügen, so dass der entstehende Graph ein Baum ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1.



[Man könnte diesen Graphen auch gut ohne Überkreuzungen zeichnen.]

2. *Nein*, denn: Zum Beispiel gibt es in X keinen Weg von 1 nach 2.
3. *Nein*, denn: Der Graph X enthält einen Kreis (z.B. $(2,3,4,6)$).

   Fügt man eine Kante zu X hinzu, so wird es weiterhin diesen Kreis geben. Der entstehende Graph ist also *kein* Baum.

Aufgabe 5 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Wann heißt eine Relation auf einer Menge *symmetrisch*?
2. Ist die Relation $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 2 \cdot x = 3 \cdot y\}$ auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{Z}/15$ mit $x = -x + [1]$ (in $\mathbb{Z}/15$).

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Eine Relation $\square$ auf einer Menge X ist *symmetrisch*, wenn:

$$\forall_{x,y \in X} \quad (x \,\square\, y) \Longrightarrow (y \,\square\, x)$$

2. *Nein*, denn z.B. ist diese Relation nicht symmetrisch: Es ist $(3, 2)$ wegen $2 \cdot 3 = 6 = 3 \cdot 2$ in dieser Relation enthalten, aber $(2, 3)$ ist wegen $2 \cdot 2 = 4 \neq 9 = 3 \cdot 3$ *nicht* in dieser Relation enthalten.

   [Diese Relation ist außerdem auch nicht reflexiv oder transitiv.]
3. Sei $x := [8] \in \mathbb{Z}/15$. Dann ist $x = -x + [1]$ in $\mathbb{Z}/15$, denn in $\mathbb{Z}/15$ gilt:

$$\begin{aligned}
-x + [1] &= -[8] + [1] \\
&= [-8 + 1] \\
&= [-7] \\
&= [15 - 7] \\
&= [8] \\
&= x.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3 + 2 = 5 Punkte).

1. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $\frac{2+i}{3-2\cdot i}$.
   Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Was ist das Supremum der Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ von $\mathbb{R}$?
   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Erweitern mit $3 + 2 \cdot i$ liefert:
$$\begin{aligned}\frac{2+i}{3-2\cdot i} &= \frac{(2+i)\cdot(3+2\cdot i)}{(3-2\cdot i)\cdot(3+2\cdot i)}\\ &= \frac{6+3\cdot i+4\cdot i-2}{9+4}\\ &= \frac{4}{13}+\frac{7}{13}\cdot i.\end{aligned}$$
   Da $4/13$ und $7/13$ reell sind, ist $7/13$ der Imaginärteil von $(2+i)/(3-2\cdot i)$.
2. Das Supremum der angegebenen Menge $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ ist 2, denn:
   - Offenbar ist 2 eine obere Schranke von A.
   - *Angenommen*, es gäbe eine obere Schranke $t \in \mathbb{R}$ von A mit $t < 2$. Dann wäre $x := (t+2)/2 \in A$, aber
   $$t = \frac{t+t}{2} < \frac{t+2}{2} = x,$$
   im Widerspruch dazu, dass t eine obere Schranke von A ist.
   [Hier genügt eine weniger ausführliche Begründung.]