Probeklausur zu Grundlagen der Mathematik$^{\text{FIDS}}$

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold 27. November 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 16:10. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 17:40 Uhr oder vor 17:20 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

☐ Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Lineare Algebra I nicht bestehe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich für eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	10	10	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+2+5 = 10 Punkte)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen.

1. Welchen Wert erhält $(\neg B) \wedge (A \implies B)$, wenn wir A mit w und B mit f belegen? Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Zeichnen Sie den Syntaxbaum für $(\neg B) \wedge (A \implies B)$.
3. Ist $(A \vee B) \implies (A \wedge B)$ eine aussagenlogische Tautologie?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 ($2 + 3 + 5 = 10$ Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} \cap \{0, 42, 2023\}$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $f\colon \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\exists_{y \in \{0,1,2\}} \quad \forall_{x \in \{0,1,2\}} \quad f(x) \neq y.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv. Ist dann auch $f \circ f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 ($1 + 5 + 4 + 5 = 15$ **Punkte**)**.** Wir betrachten die rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(n+1) &= f(n) + 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

definierte Abbildung $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie $f(2)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Beweisen Sie per Induktion, dass $f(n) = 5 + 3 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
3. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2023$? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Tausendfüßler Millo wird mit genau drei Füßen geboren. Am n-ten Tag nach seiner Geburt wachsen ihm jeweils genau n zusätzliche Füße. Wieviele Füße hat Millo nach dem 88.-ten Tag? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (1+4+5 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten den ungerichteten Graphen

$$X := \big(\{1,\dots,6\},\{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{5,2\}\}\big).$$

1. Skizzieren Sie X.
2. Ist X ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie zwei nicht-isomorphe Bäume mit jeweils genau sechs Knoten an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Wann heißt eine Relation auf einer Menge *transitiv*?
2. Ist die Relation $\{(x, 2 \cdot x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{Z}/13$ mit $[5] \cdot x = [1]$ (in $\mathbb{Z}/13$). Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (3 + 2 = 5 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $\frac{2+3\cdot i}{3+2\cdot i}$.
   Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort!