Probeklausur zu Grundlagen der Mathematik$^{\mathsf{FIDS}}$

Prof. Dr. C. Löh/PD Dr. F. Strunk/M. Uschold 27. November 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen/Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter.
- Beginn: 16:10. Sie haben 90 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 17:40 Uhr oder vor 17:20 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

☐ Ich habe die Studienleistung für diese Vorlesung bestanden, werde diese aber *nicht* als Studienleistung einbringen und stattdessen max. 3 Bonuspunkte für die Klausur erhalten; Bonuspunkte werden nur vergeben, wenn die Klausur bestanden ist.

Falls ich die Studienleistung der Vorlesung Lineare Algebra I nicht bestehe, kann ich das Modul *nicht* im WS 23/24 abschließen. Im Rahmen des Moduls kann die Anrechnung von Bonuspunkten ausschließlich für eine der beiden Modulteilprüfungen erfolgen. Wurde die Anrechnung von Bonuspunkten bereits für eine Modulteilprüfung beantragt, ist ein weiterer Antrag für eine andere Modulteilprüfung nicht zulässig und bleibt unberücksichtigt.

Unterschrift des Teilnehmers:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Bonus?	Summe
Punkte maximal	10	10	15	10	10	5	60	max. 3	60
erreichte Punkte									

Note: Unterschrift:

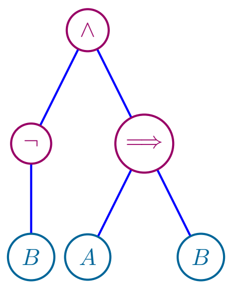
Aufgabe 1 (3+2+5 = 10 Punkte). Seien A und B aussagenlogische Variablen.

1. Welchen Wert erhält $(\neg B) \wedge (A \implies B)$, wenn wir A mit w und B mit f belegen? Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Zeichnen Sie den Syntaxbaum für $(\neg B) \wedge (A \implies B)$.
3. Ist $(A \vee B) \implies (A \wedge B)$ eine aussagenlogische Tautologie?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Wir erhalten Schritt für Schritt:
   - $\neg B$ erhält den Wert w
   - $A \implies B$ erhält den Wert f
   - $(\neg B) \wedge (A \implies B)$ erhält den Wert f.
2.



3. *Nein*, denn: Wenn wir A mit w und B mit f belegen, erhalten wir Schritt für Schritt:
   - $A \vee B$ erhält den Wert w
   - $A \wedge B$ erhält den Wert f
   - $(A \vee B) \implies (A \wedge B)$ erhält den Wert f.

   Da es eine Belegung gibt, die nicht zum Wert w führt, ist die gegebene Formel keine aussagenlogische Tautologie.

Aufgabe 2 $(2+3+5=10$ Punkte$)$.

1. Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} \cap \{0, 42, 2023\}$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $f\colon \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\exists_{y\in\{0,1,2\}} \quad \forall_{x\in\{0,1,2\}} \quad f(x) \neq y.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv. Ist dann auch $f \circ f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Es ist $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} = \{0,1,2\}$. Also ist

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} \cap \{0,42,2023\} = \{0,1,2\} \cap \{0,42,2023\} = \{0\}.$$

   Somit enthält $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} \cap \{0,42,2023\}$ genau das Element 0.

2. Sei $f\colon \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$ gegeben durch $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 0$, $2 \longmapsto 0$. Dann gilt

$$\forall_{x\in\{0,1,2\}} \quad f(x) = 0 \neq 1.$$

   Insbesondere gilt $\exists_{y\in\{0,1,2\}} \quad \forall_{x\in\{0,1,2\}} \quad f(x) \neq y$ (nämlich z.B. für $y = 1$).

3. *Ja*, denn: Sei $z \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f \circ f(x) = z$ gibt: Da f surjektiv ist, gibt es ein $y \in \mathbb{N}$ mit $f(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = y$. Dann ist

$$f \circ f(x) = f\bigl(f(x)\bigr) = f(y) = z,$$

   wie gewünscht.

Aufgabe 3 ($1 + 5 + 4 + 5 = 15$ **Punkte).** Wir betrachten die rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(n+1) &= f(n) + 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie $f(2)$. Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Beweisen Sie per Induktion, dass $f(n) = 5 + 3 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
3. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2023$? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Tausendfüßler Millo wird mit genau drei Füßen geboren. Am n-ten Tag nach seiner Geburt wachsen ihm jeweils genau n zusätzliche Füße. Wieviele Füße hat Millo nach dem 88.-ten Tag? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Mit der Rekursion erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) = f(1) + 3 \\ &= f(0+1) + 3 = \big(f(0) + 3\big) + 3 \\ &= (5+3) + 3 \\ &= 11. \end{aligned}$$

2. Induktionsanfang: Es gilt $f(0) = 5 = 5 + 3 \cdot 0$, wie behauptet.

   Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei bereits gezeigt, dass $f(n) = 5 + 3 \cdot n$ gilt.

   Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch $f(n+1) = 5 + 3 \cdot (n+1)$ gilt: Es gilt

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 3 && \text{(Rekursionsgleichung)} \\ &= (5 + 3 \cdot n) + 3 && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 5 + 3 \cdot (n+1). && \text{(grundlegende Arithmetik in } \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   [Alternativ kann man zeigen, dass $n \longmapsto 5 + 3 \cdot n$ dieselbe Rekursion erfüllt wie f und den Rekursionssatz anwenden.]

3. *Nein*, denn: Nach dem zweiten Teil gilt in $\mathbb{Z}/3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\big[f(n)\big] = [5 + 3 \cdot n] = [5] = [2].$$

Aber $[2023] = [1]$ in $\mathbb{Z}/3$ (wie man z.B. mit der Quersummenregel oder einer einfachen Rechnung zeigen kann).

[Alternativ kann man auch direkt mit Teilbarkeit argumentieren statt in $\mathbb{Z}/3$.]

4. Die Anzahl $f(n)$ der Füße von Millo am Ende von Tag n genügt der folgenden Rekursion:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(n+1) &= f(n) + n + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad f(n) = 3 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

gilt. Insbesondere ist

$$f(88) = 3 + \frac{88 \cdot 89}{2} = 3 + 44 \cdot 89 = 3919.$$

[Alternativ kann man die geschlossene Form auch wie in der Vorlesung per Induktion/Rekursion beweisen. Als Ergebnis wäre hier auch $3 + 44 \cdot 89$ ausreichend gewesen.]

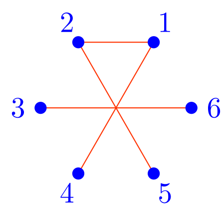
Aufgabe 4 (1+4+5 = 10 Punkte). Wir betrachten den ungerichteten Graphen

$$X := \big(\{1,\ldots,6\}, \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{5,2\}\}\big).$$

1. Skizzieren Sie X.
2. Ist X ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie zwei nicht-isomorphe Bäume mit jeweils genau sechs Knoten an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1.



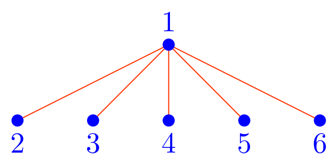
[Man beachte dabei, dass $\{2,5\} = \{5,2\}$ ist. Außerdem könnte man diesen Graphen auch gut ohne Überkreuzungen zeichnen.]

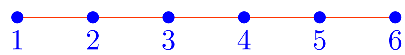
2. *Nein*, denn X ist nicht zusammenhängend. Zum Beispiel gibt es *keinen* Weg in X von 2 nach 3.

3. Wir betrachten die Graphen

$$Y := \big(\{1,\ldots,6\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}\}\big)$$
$$Z := \big(\{1,\ldots,6\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}\big).$$

Dann sind Y und Z Bäume (da sie zusammenhängend sind und keine Kreise enthalten):





Nach Konstruktion haben Y und Z genau sechs Knoten.

Die Graphen Y und Z sind *nicht* isomorph, denn Y enthält einen Knoten vom Grad 5 (nämlich 1) aber kein Knoten in Z hat Grad 5.

[Für die Nicht-Isomorphie gibt es auch alternative Argumente.]

Aufgabe 5 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Wann heißt eine Relation auf einer Menge *transitiv*?
2. Ist die Relation $\{(x, 2 \cdot x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{Z}/13$ mit $[5] \cdot x = [1]$ (in $\mathbb{Z}/13$). Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Eine Relation $\square$ auf einer Menge X ist *transitiv*, wenn:
$$\forall_{x,y,z \in X} \quad \big((x \mathbin{\square} y) \wedge (y \mathbin{\square} z)\big) \Longrightarrow (x \mathbin{\square} z)$$
2. *Nein*, denn: Die Relation ist nicht reflexiv, denn:
Zum Beispiel ist $(1, 1) \notin \{(x, 2 \cdot x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$, da $1 \neq 2 \cdot 1$.
[Die Relation ist außerdem weder symmetrisch noch transitiv.]
3. Sei $x := [8] \in \mathbb{Z}/13$. Dann erhalten wir in $\mathbb{Z}/13$:
$$[5] \cdot x = [5 \cdot 8] = [40] = [3 \cdot 13 + 1] = [1]$$

Aufgabe 6 ($3 + 2 = 5$ Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $\frac{2+3\cdot i}{3+2\cdot i}$.
   Geben Sie alle Zwischenschritte an.
2. Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Erweitern mit $3 - 2 \cdot i$ liefert:

$$\begin{aligned}\frac{2+3\cdot i}{3+2\cdot i} &= \frac{(2+3\cdot i)\cdot(3-2\cdot i)}{(3+2\cdot i)\cdot(3-2\cdot i)} \\ &= \frac{6+6+i\cdot(9-4)}{3^2+2^2} \\ &= \frac{12+i\cdot 5}{13} \\ &= \frac{12}{13} + i \cdot \frac{5}{13}.\end{aligned}$$

   Da $12/13$ und $5/13$ reell sind, ist $5/13$ der Imaginärteil von $\frac{2+3\cdot i}{3+2\cdot i}$.

2. *Nein*, denn: Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}$ ist bekanntlich nicht-leer und beschränkt und besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.