Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh Blatt 10 vom 17. Juni 2016

Aufgabe 1 (hyperbolische Metrik)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $z \longmapsto z + i$ ist eine Isometrie von (H, d_H).
2. Es gilt $d_H(i, 1 + 2 \cdot i) = \sqrt{2}$.

   Hinweis. Muss man dazu $d_H(i, 1 + 2 \cdot i)$ exakt berechnen?

Aufgabe 2 (hyperbolische Spiegelung)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\overline{z}, \end{aligned}$$

wobei $\overline{z}$ die komplexe Konjugation von $z \in H \subset \mathbb{C}$ bezeichnet.

1. Veranschaulichen Sie f geeignet.
2. Zeigen Sie, dass f eine riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist.

Aufgabe 3 (positive Definitheit der hyperbolischen Metrik)**.** Seien $z, z' \in H$ mit $d_H(z, z') = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $z = z'$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die triviale Abschätzung für hyperbolische Längen; die vertikale Abschätzung hilft bei Kurven, die zu weit nach oben entfleuchen.

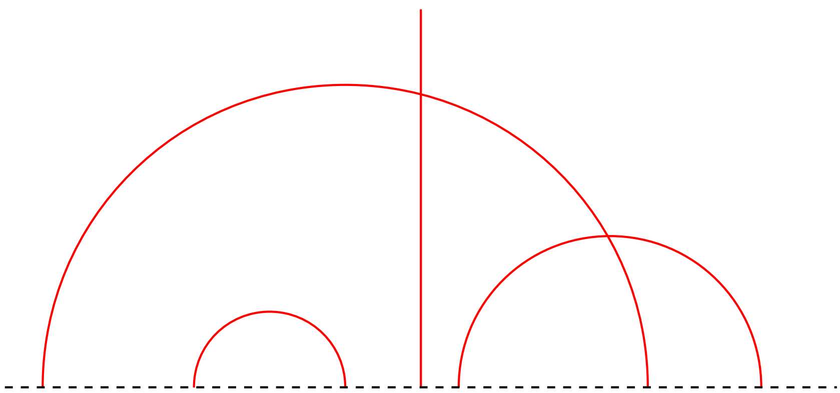
Aufgabe 4 (Inversion am Kreis)**.** Wir betrachten die Abbildung (wobei wir H als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen)

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Ein *verallgemeinerter Halbkreis* ist eine Teilmenge $K \subset H$ folgender Form:

- Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K = \{z \in H \mid |z - m| = r\}$ oder
- es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $K = \{a + i \cdot t \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Zeigen Sie: Ist K ein verallgemeinerter Halbkreis, so ist auch $f(K)$ ein verallgemeinerter Halbkreis. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!



Bitte wenden

Bonusaufgabe (riemannsche Länge vs. metrische Länge)**.** Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma).$$

Hinweis. Die Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ folgt direkt aus der Definition von d_H und der metrischen Länge $L_{(H,d_H)}$.

Die umgekehrte Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von d_H), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit der analytischen Beschreibung der metrischen Länge in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten.

Abgabe bis zum 24. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen