Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 13 vom 8. Juli 2016

Aufgabe 1 (Quasi-Isometrien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede Quasi-Isometrie ist surjektiv.
2. Jede surjektive quasi-isometrische Einbettung ist eine Quasi-Isometrie.

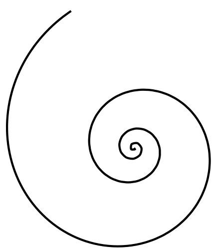
Aufgabe 2 (sphärische Tangentialvektoren)**.**

1. Sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass dann
$$\dot\gamma(t) \perp \gamma(t)$$
für alle $t \in [T_0, T_1]$ gilt (wobei „$\perp$“ die Orthogonalität bezüglich des gewöhnlichen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet).
Hinweis. Differenzieren Sie die definierende Gleichung für S^2.
2. Seien $x \in S^2$ und $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \perp x$. Konstruieren Sie eine glatte Kurve $\gamma\colon [-1, 1] \longrightarrow S^2$ mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = v$.

Aufgabe 3 (stereographische Projektion)**.**

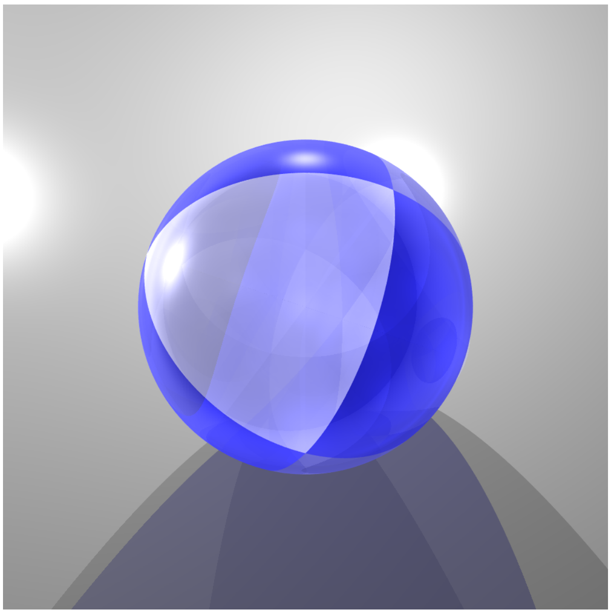
1. Sei $N := (0, 0, 1) \in S^2$ der Nordpol und sei
$$\begin{aligned} \sigma\colon S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \frac{1}{1 - x_3} \cdot (x_1, x_2) \end{aligned}$$
die *stereographische Projektion*. Zeigen Sie, dass σ winkeltreu ist.
2. Ist σ flächentreu? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Skizzieren Sie (von Hand) eine Weltkarte in stereographischer Projektion.
4. Skizzieren Sie (von Hand) eine Weltkarte in stereographischer Projektion, wenn nicht der Nordpol entfernt wird, sondern Kuala Lumpur.

Aufgabe 4 (logarithmische Spirale)**.** Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot \bigl(\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t))\bigr) \end{aligned}$$
bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ eine quasi-isometrische Einbettung ist. Gibt es eine geodätische Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die „nahe“ an f liegt? Begründen Sie Ihre Antwort!



Bitte wenden

Bonusaufgabe (reguläre Pflasterungen der Sphäre)**.** Verwenden Sie Povray (http://www.povray.org/), um schöne (und mathematisch exakte!) Bilder der regulären Pflasterungen der Sphäre zu erstellen.



Freiwillige Abgabe bis zum 15. Juli, 12:30, in die Briefkästen