

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh

Blatt 14 vom 15. Juli 2016

Aufgabe 1 (hyperbolische Gruppen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

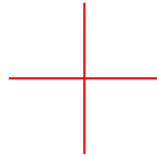
1. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2016$ ist hyperbolisch.
2. Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2016$ ist hyperbolisch.

Aufgabe 2 (Taxi-Kreuz). Wir betrachten die Menge

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

und versehen X mit der Taxi-Metrik d_1 .

1. Zeigen Sie, dass (X, d_1) geodätisch ist.
2. Zeigen Sie, dass (X, d_1) ein hyperbolischer metrischer Raum ist.



Aufgabe 3 (hyperbolische Geodäten). Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer metrischer Raum und seien $\gamma: [0, L] \rightarrow X$, $\gamma': [0, L'] \rightarrow X$ Geodäten in X mit

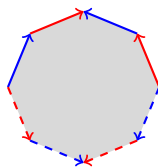
$$\gamma(0) = \gamma'(0) \quad \text{und} \quad d(\gamma(L), \gamma'(L')) \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass $|L - L'| \leq 1$ und

$$\forall t \in [0, \min(L, L')] \quad d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq 2 \cdot \delta + 2.$$

Aufgabe 4 (hyperbolische Brezel).

1. Was für eine Fläche M erhält man, wenn man die Seiten eines Achtecks wie unten angegeben verklebt? Skizzieren Sie M und wie M aus dem Achteck entsteht!



2. Erklären Sie anschaulich, warum M eine (glatte) zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.
3. Erklären Sie anschaulich, wie man mithilfe geeigneter regulärer Pflasterungen von (H, d_H) eine riemannsche Metrik auf M definieren kann, die lokal isometrisch zu (H, d_H) ist.

Bonusaufgabe (Skript). Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

Freiwillige Abgabe bis zum 20. Juli direkt bei den Übungsleitern